

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

для 5 класса

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

Пять пятиклассников решали задачи на олимпиаде. Аня решила на 4 задачи больше Бори. Варя решила на 3 задачи меньше, чем Гена. Даша решила на 2 задачи меньше Вари и на 1 задачу меньше Бори. Кто из детей решил одинаковое количество задач?

Ответ:

- ✓ Аня
- Боря
- Варя
- ✓ Гена
- Даша

Точное совпадение ответа — 1 балл

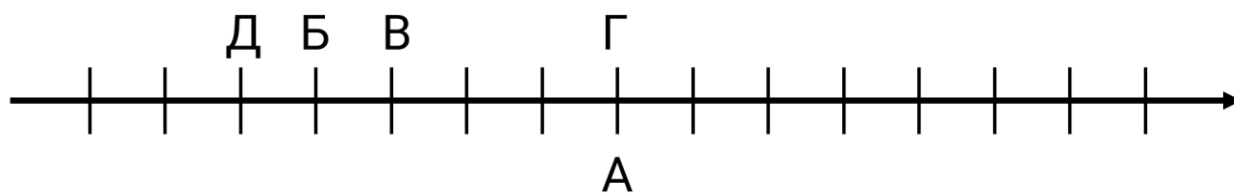
Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Изобразим условие задачи на числовой прямой. Начнём с Вари, отметим точку на числовой оси, соответствующую количеству задач, решенных Варей. Тогда точка, соответствующая количеству задач, решённых Геной, будет на 3 единицы правее Вариной. А точка, соответствующая количеству задач у Даши, будет на 2 единицы левее Вариной. Точка Бори будет находиться на 1 единицу

правее Дашиной точки. А точка Ани на 4 единицы правее Бориной точки.

Из рисунка видим, что количество задач совпадают у Ани и Гены.



Задание № 1.2

Условие:

Пятеро ребят участвовали в забеге на 10 км. Данила бежал на 2 минуты дольше, чем Алина. Катя прибежала на 3 минуты раньше, чем Илья, но на 3 минуты позднее, чем Давид. Алина прибежала на 1 минуту позднее Давида. Кто из ребят финишировал одновременно?

Ответ:

- ☐ Алина
- ☒ Данила
- ☒ Катя
- ☐ Илья
- ☐ Давид

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

Пятеро пятиклассников сравнивали свой рост. Вася на 3 см ниже Оли. Андрей на 5 см выше Тани, но на 4 см ниже Миши. Таня ниже Васи на 2 см. Кто из пятиклассников имеет одинаковый рост?

Ответ:

- ☐ Таня
- ☒ Оля
- ☒ Андрей
- ☐ Вася
- ☐ Миша

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.4

Условие:

Пятеро пятиклассников шоколадные конфеты. Денис съел на 2 конфеты больше, чем Ксюша. Сергей съел на 1 конфету больше Альберта, но на 3 конфеты меньше Лёни. Альберт съел на 2 конфеты меньше Дениса. Кто из пятиклассников съел одинаковое количество конфет?

Ответ:

- ☐ Лёня
- ☒ Сергей
- ☐ Денис
- ☒ Ксюша
- ☐ Альберт

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

У Винни-Пуха есть три красных шарика, три жёлтых и три зелёных. Он положил их в три горшочка — в каждый по три шарика. Сова написала на горшочках: «КЖЗ», «ЖЖК» и «ЗКК». Оказалось, что все надписи на горшочках неверные. Пятачок вынул из горшочка «КЖЗ» зелёный и жёлтый шарик, из «ЖЖК» — жёлтый и красный, а из «ЗКК» — зелёный и красный. Какой ещё шарик лежит в горшочке «ЖЖК»?

Ответ:

- ☒ Красный
- ☐ Жёлтый
- ☐ Зелёный

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пятачок из 3 горшочков вместе вытащил 2 зелёных шарика, 2 жёлтых и 2 красных. Значит, в горшочках остались 1 зелёный, 1 жёлтый и 1 красный. Посмотрим, где может лежать красный шарик. Точно не в 1 горшочке, т.к. надпись КЖЗ должна быть жёлтой. И точно не в ЗКК, т.к. там тоже надпись должна быть ложной. Значит, в горшочке ЖЖК лежит ещё 1 красный шарик.

Задание № 2.2

Условие:

У Моховой Бороды выросли три красные ягоды, три жёлтые и три зелёные. Он положил их в три банки — в каждую по три ягоды. Полботинка написал на банках: «ЖКК», «КЖЗ» и «ЖЖЗ». Оказалось, что все надписи на банках неверные. Муфта вынул из банки «ЖКК» жёлтую и красную ягоды, из «КЖЗ» — зелёную и красную, а из «ЖЖЗ» — зелёную и жёлтую. Какая ягода осталась в банке «ЖКК»?

Ответ:

- ☐ Красная
- ☒ Жёлтая
- ☐ Зелёная

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

У Лосяша есть три красных карандаша, три зелёных и три синих. Он положил их в три пенала — в каждый по три карандаша. Крош написал на пеналах: «ЗСС», «КЗС» и «КЗЗ». Оказалось, что все надписи на пеналах неверные. Ёжик вынул из пенала «ЗСС» зелёный и синий карандаши, из «КЗС» — красный и синий, а из «КЗЗ» — красный и зелёный. Какой карандаш остался в пенале «ЗСС»?

Ответ:

- ☐ Красный
- ☐ Жёлтый
- ☒ Зелёный

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.4

Условие:

У Малыша есть три красные конфеты, три зелёные и три фиолетовые. Он положил их в три стакана — в каждый по три конфеты. Затем он написал на стаканах: «КЗФ», «КЗЗ» и «ЗФФ». Карлсон достал из стакана «КЗФ» красную и фиолетовую конфеты, из «КЗЗ» — красную и зелёную, а из «ЗФФ» — зелёную и фиолетовую. Какая конфета осталась в стакане «ЗФФ»?

Ответ:

- ☐ Красная
- ☐ Жёлтая
- ☒ Зелёная

Точное совпадение ответа — 1 балл

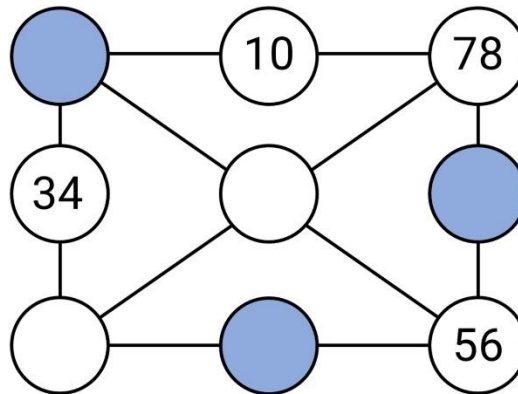
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

Условие:

Заполните ячейки так, чтобы суммы чисел в ячейках вдоль одной линии везде были одинаковы. В ответ запишите сумму чисел в голубых ячейках.



Ответ: 160

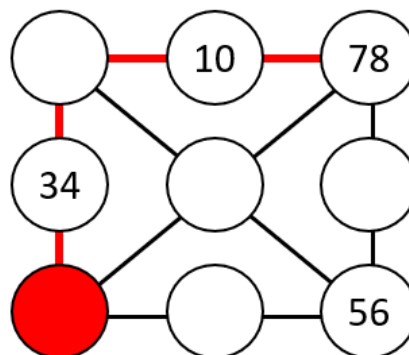
Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

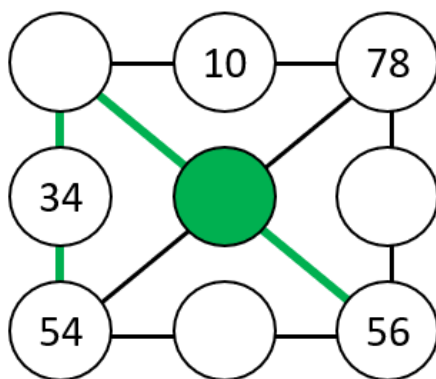
Т.к. суммы в красных линиях должны быть одинаковы, то число в красном кружке будет равно

$$10 + 78 - 34 = 54$$

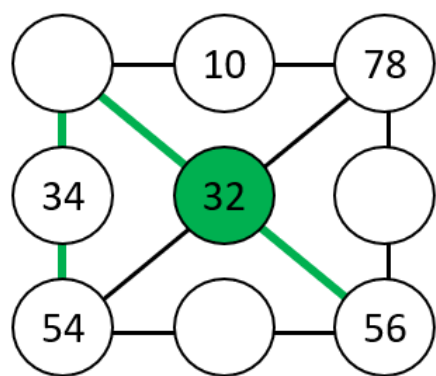


Т.к. суммы чисел в зелёных линиях равны, число в зелёном кружке

$$34 + 54 - 56 = 32.$$



Теперь мы знаем сумму чисел в каждой линии, т.к. сумма чисел в диагонали $54 + 32 + 78 = 164$.

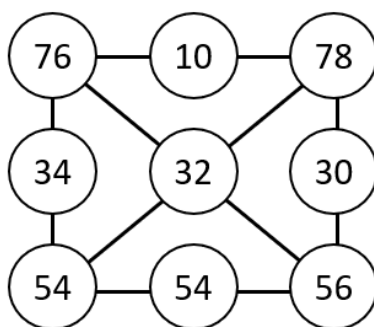


Отсюда легко находятся 3 оставшихся числа:

$$1) 164 - 34 - 54 = 76$$

$$2) 164 - 54 - 56 = 54$$

$$3) 164 - 56 - 78 = 30$$

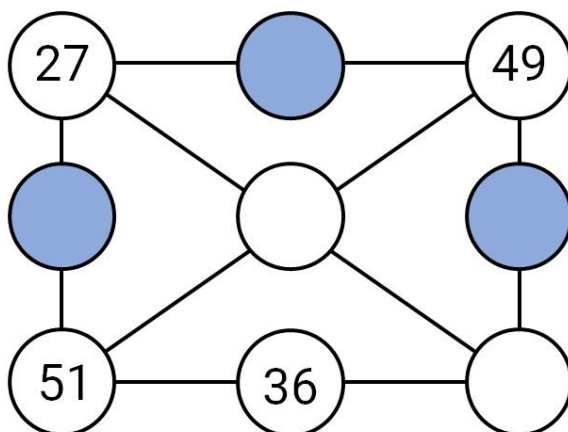


Отсюда сумма голубых чисел $76 + 54 + 30 = 160$

Задание № 3.2

Условие:

Заполните ячейки так, чтобы суммы чисел в ячейках вдоль одной линии везде были одинаковы. В ответ запишите сумму чисел в голубых ячейках.



Ответ: 204

Точное совпадение ответа — 1 балл

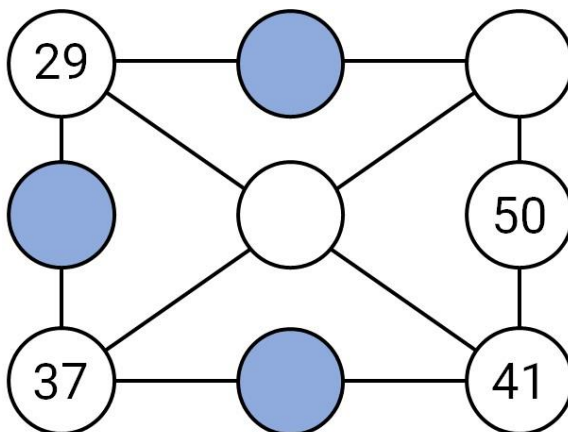
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

Условие:

Заполните ячейки так, чтобы суммы чисел в ячейках вдоль одной линии везде были одинаковы. В ответ запишите сумму чисел в голубых ячейках.



Ответ: 166

Точное совпадение ответа — 1 балл

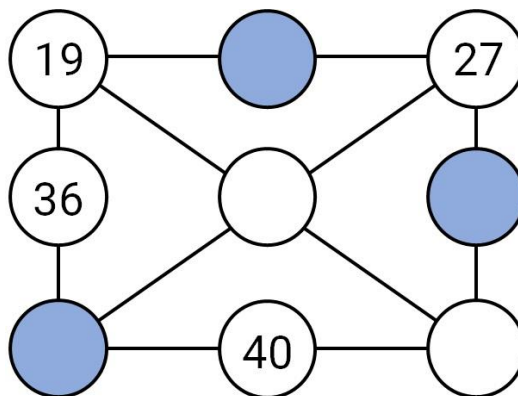
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.4

Условие:

Заполните ячейки так, чтобы суммы чисел в ячейках вдоль одной линии везде были одинаковы. В ответ запишите сумму чисел в голубых ячейках.



Ответ: 43

Точное совпадение ответа — 1 балл

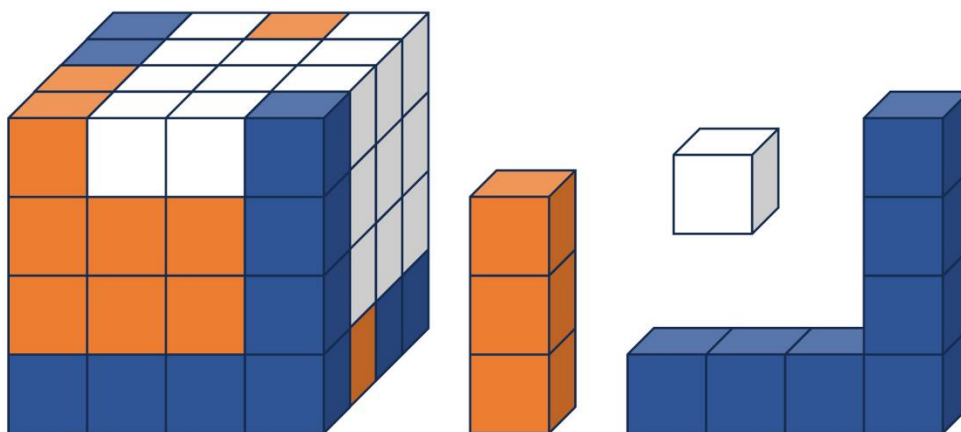
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Условие:

Из деталей трёх видов — синих уголков, оранжевых брусков и белых маленьких кубиков — сложили большой куб размером $4 \times 4 \times 4$, как показано на рисунке.



Сколько маленьких белых кубиков было использовано?

Ответ: 19

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

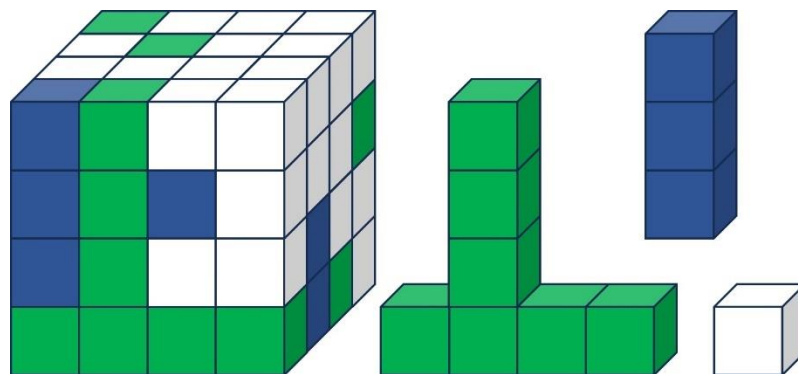
На переднем слое мы видим 1 синюю деталь, ещё одна синяя деталь будет на третьем слое и ещё одна — на четвёртом. На переднем слое мы видим одну оранжевую деталь, которая идёт в высоту и 4 оранжевых детали, которые идут в глубину кубика. На втором слое мы видим на верхней грани часть оранжевой детали, которая продолжается вниз. И на правой грани видим часть оранжевой детали, которая продолжается влево. Последняя оранжевая деталь расположена на четвёртом слое в высоту. Всего было использовано 3 синие детали. Значит, синих кубиков здесь $3 \cdot 7 = 21$. Оранжевых деталей было 8. Значит, оранжевых кубиков $8 \cdot 3 = 24$. А всего кубиков $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Остальные $64 - 24 - 21 = 19$ кубиков — белые.

Задание № 4.2

Условие:

Из деталей трёх видов — зелёных Т-образных фигур, синих брусков и белых маленьких кубиков — сложили большой куб размером $4 \times 4 \times 4$, как показано на рисунке.



Сколько маленьких белых кубиков было использовано?

Ответ: 31

Точное совпадение ответа — 1 балл

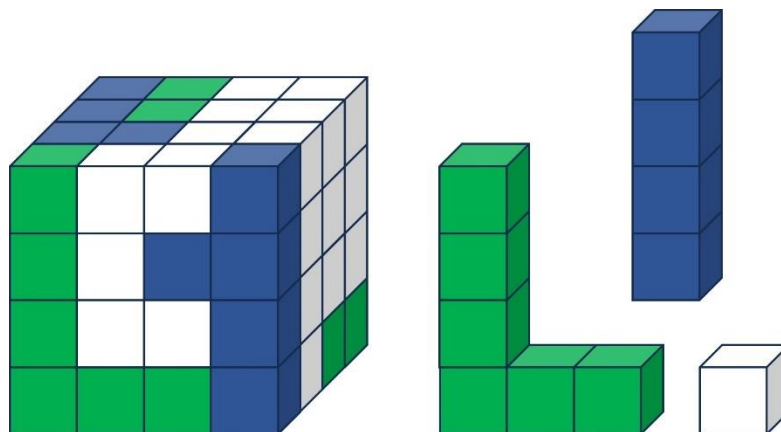
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

Из деталей трёх видов — зелёных уголков, синих брусков и белых маленьких кубиков — сложили большой куб размером $4 \times 4 \times 4$, как показано на рисунке.



Сколько маленьких белых кубиков было использовано?

Ответ: 22

Точное совпадение ответа — 1 балл

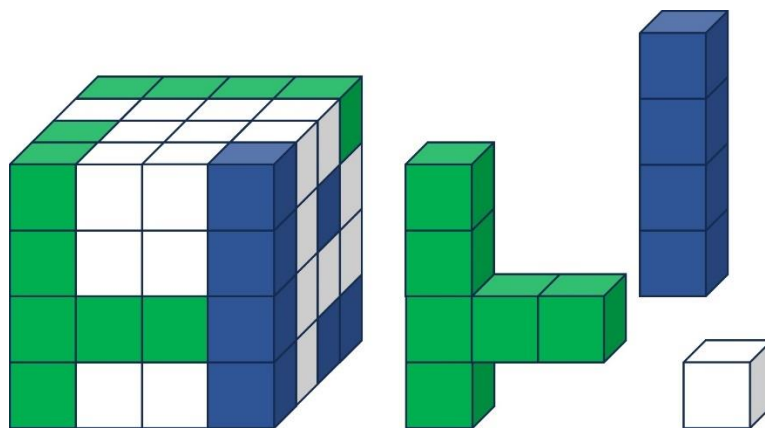
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.4

Условие:

Из деталей трёх видов — зелёных Т-образных фигур, синих брусков брусков и белых маленьких кубиков — сложили большой куб размером $4 \times 4 \times 4$, как показано на рисунке.



Сколько маленьких белых кубиков было использовано?

Ответ: 27

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

Водитель «Лады» собирается поехать из села в деревню, а «Волга» — из деревни в село. Если «Волга» выедет через час после отправления «Лады», то они встретятся через 3 часа после выезда «Волги». А если «Лада» выедет через 2 часа после выезда «Волги», то они встретятся через 2 часа после выезда «Лады». Через какое время произойдёт встреча, если они выедут одновременно?

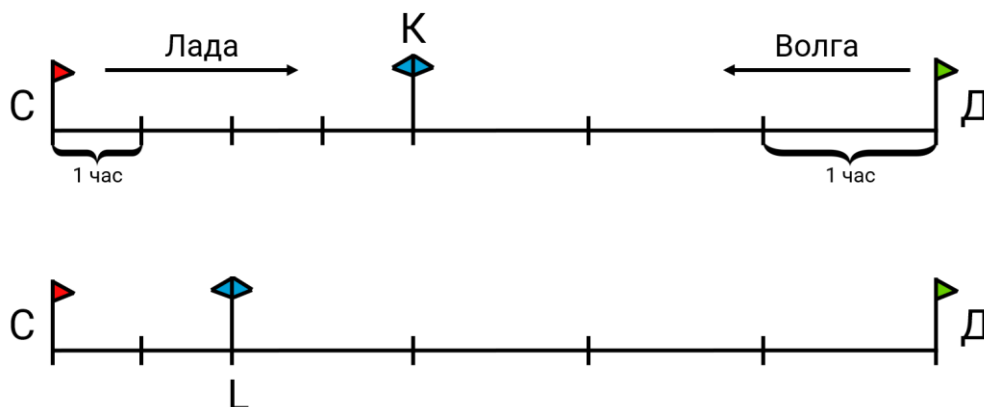
Ответ: 3 ч 20 мин

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Нарисуем две схемы, соответствующие первой и второй ситуации.



Пусть Волга выехала через час после того, как выехала Лада. Тогда условно до встречи Лада проедет четыре одинаковых отрезка пути, а Волга — три (но естественно, другой длины).

Теперь если Лада выедет через два часа после того, как выехала Волга, то за два часа до встречи она проедет два своих отрезка, а Волга — четыре своих.

Таким образом, весь путь состоит из 4 отрезков пути Лады и 3 отрезков пути Волги или же из 2 отрезков Лады и 4 Волги. Обозначим отрезок Лады за x , а отрезок Волги за y . Весь путь $= 4x + 3y = 2x + 4y$.

Откуда $4x + 3y = 2x + 4y$

$2x = y$.

То есть отрезок пути Лады в 2 раза меньше отрезка пути Волги. А поскольку это были отрезки пути, которые машины проезжают за час, то скорость Волги в два раза больше скорости Лады. Значит с точки зрения Лады весь путь состоит из 10 ее отрезков пути, а при одновременном выезде она проедет треть этого пути. Значит, затраченное время будет равно $10/3$ часа. То есть 3 часа 20 минут.

Ответ 3ч 20мин.

Задание № 5.2

Условие:

Водитель «Лады» собирается поехать из села в деревню, а водитель «Волги» — из деревни в село. Если «Волга» выедет через час после отправления «Лады», то они встретятся через 4 часа после выезда «Волги». А если «Лада» выедет через 2 часа после выезда «Волги», то они встретятся через 3 часа после отправления «Лады». Через какое время произойдёт встреча, если они выедут одновременно?

Ответ: 4 ч 20 мин

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

Водитель грузовика собирается поехать из села в деревню, а мотоциклист — из деревни в село. Если мотоцикл выедет через 2 часа после отправления грузовика, то они встретятся через 4 часа после выезда мотоцикла. А если грузовик выедет через 2 часа после выезда мотоцикла, то они встретятся через 3 часа после отправления грузовика. Через какое время произойдёт встреча, если они выедут одновременно?

Ответ: 4 ч 30 мин

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.4

Условие:

Водитель грузовика собирается поехать из села в деревню, а мотоциклист — из деревни в село. Если мотоцикл выедет через 2 часа после отправления грузовика, то они встретятся через 5 часов после выезда мотоцикла. А если грузовик выедет через 2 часа после выезда мотоцикла, то они встретятся через 4 часа после отправления грузовика. Через какое время произойдёт встреча, если они выедут одновременно?

Ответ: 5 ч 30 мин

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Условие:

У Васи есть часы с кукушкой: каждый новый час птица кукует столько раз, сколько показывает часовая стрелка. Одно «ку-ку» засчитывается за одно кукование. К сожалению, часы сломались и теперь, когда кукушка кукует, они останавливаются на 1 минуту с каждым «ку-ку». Например, если птица кукует два раза, то часы останавливаются на 2 минуты. Однажды после того, как кукушка прокуковала, часы остановились, и в тот момент, когда они снова пошли, показали ровно полночь — это совпало со временем на правильных часах. Сколько времени покажут часы в следующую полночь?

Ответ: 21 ч 57 мин

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Согласно условию, когда часы покажут 1:00, пройдёт $60 + 1$ минута, когда покажут 2:00, пройдёт $60 + 2$ минуты и т.д. Таким образом к 12:00 пройдёт $60 \cdot 12 + (1 + 2 + \dots + 12) = 60 \cdot 12 + 12 \cdot 13 \div 2 = 60 \cdot 12 + 6 \cdot 13 = 60 \cdot 12 + 78$ минут. Когда же часы покажут 21:00, или 9:00 второй раз согласно 12-часовому отсчёту, пройдёт $60 \cdot 9 + (1 + \dots + 9) = 60 \cdot 9 + 9 \cdot 10 \div 2 = 60 \cdot 9 + 45$ минут, таким образом в сумме пройдёт $60 \cdot (12 + 9) + 78 + 45 = 60 \cdot 21 + 123 = 60 \cdot 23 + 3$ минуты. Таким образом пройдёт ещё 57 минут, часы покажут 21:57 (9:57), и пройдёт 24 часа с момента, когда часы показывали 00:00.

Задание № 6.2

Условие:

У Васи есть часы с кукушкой: каждый новый час птица кукует столько раз, сколько показывает часовая стрелка. Одно «ку-ку» засчитывается за одно кукование. К сожалению, часы сломались и теперь, когда кукушка кукует, они останавливаются на 2 минуты с каждым «ку-ку». Например, если птица кукует два раза, то часы останавливаются на 4 минуты. Однажды после того, как кукушка прокуковала, часы остановились, и в тот момент, когда они снова пошли, показали ровно полночь — это совпало со временем на правильных часах. Сколько времени покажут часы в следующую полночь?

Ответ: 9 ч 12 мин

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.3

Условие:

У Васи есть электронные часы, показывающие время в 24-часовом формате. Каждый новый час устройство сигнализирует столько раз, сколько сейчас часов. К сожалению, гаджет сломался и теперь, когда устройство сигнализирует, оно останавливается на 1 минуту за каждый сигнал. Например, если часы сигнализируют 14 раз, то они остановятся на 14 минут. Однажды после сигналов часы остановились и в тот момент, когда они снова пошли, показали ровно полночь — это совпало со временем на правильных часах. Сколько времени покажут электронные часы Васи в следующую полночь?

Ответ: 20 ч 30 мин

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.4

Условие:

У Васи есть электронные часы, показывающие время в 24-часовом формате. Каждый новый час устройство сигнализирует столько раз, сколько сейчас часов. К сожалению, гаджет сломался и теперь, когда устройство сигнализирует, оно останавливается на 2 минуты за каждый сигнал. Например, если часы сигнализируют 14 раз, то они остановятся на 28 минут. Однажды после сигналов часы остановились и в тот момент, когда они снова пошли, показали ровно полночь — это совпало со временем на правильных часах. Сколько времени покажут электронные часы Васи в следующую полночь?

Ответ: 18 ч 18 мин

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

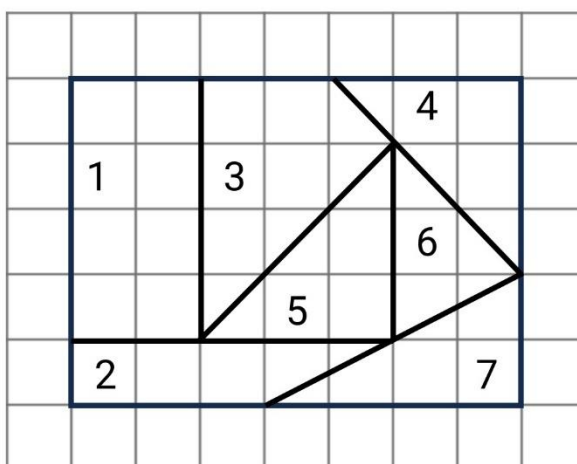
Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

Отец завещал каждому из семи своих сыновей по участку земли, указав следующие условия:

- участок Алёши должен иметь общий отрезок границы с участками Бориса и Егора;
- Васина часть должна быть вдвое больше участка Гриши;
- общая площадь участков Бориса и Егора должна быть равна площади участка Жени;
- участок Димы не должен иметь общий отрезок границы с участком Бориса.



Какой участок кому должен достаться, чтобы условия завещания выполнялись?

Ответ:

1	Вася
2	Боря
3	Женя
4	Дима
5	Алёша

6	Егор
7	Гриша

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Посчитаем площадь каждого из участков в клеточках.

Единственный участок, у которого есть участок в 2 раза меньше по площади — это участок №1, он и достаётся Васе.

Участок Жени должен быть равен сумме каких-то других двух участков, а значит единственный вариант для него — это участок №3.

Для остальных сыновей мы знаем следующее:

- у Гриши участок площади 4 (в 2 раза меньше 8) — либо №2, либо № 7;
- у Бориса и Егора — участки площади 4 и 3 — то есть №6 и какой-то из №2 и №7;
- оставшиеся участки №4 и №5 принадлежат Диме и Алёше.

Так как участок Алёши должен иметь общий отрезок с участками Бориса и Егора, то у него не может быть участок №5 (он соседний только с участком Жени и участком №6), а значит участок Алёши — №5, а Димы — № 4.

Участок Алёши (№5) должен быть соседним с участками Бориса и Егора — то есть участки №2 и №6 принадлежат Борису и Егору, следовательно, участок №7 — Гришин. У Димы (№4) и Бориса (№6 или №2) нет общей границы, то есть у Бориса участок №2.

1	8 кл	Вася
2	4 кл	
3	7 кл	Женя
4	4.5 кл	Дима
5	4.5 кл	Алёша
6	3 кл	

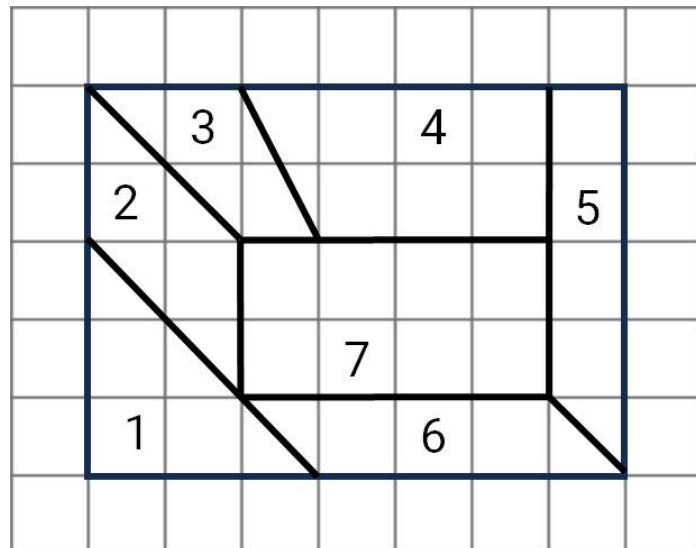
7	4 кл	Гриша
---	------	-------

Задание № 7.2

Условие:

Отец завещал каждому из семи своих сыновей по участку земли, указав следующие условия:

- участок Антона должен иметь общую границу с участками Германа и Елисея;
- часть Влада должна быть вдвое больше участка Германа;
- общая площадь участков Богдана и Елисея должна быть равна площади участка Жени;
- участок Демьяна не должен соседствовать с участком Германа.



Какой участок кому должен достаться, чтобы условия завещания выполнялись?

Ответ:

1	Антон
2	Герман
3	Богдан
4	Женя
5	Демьян

6	Елисей
7	Влад

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

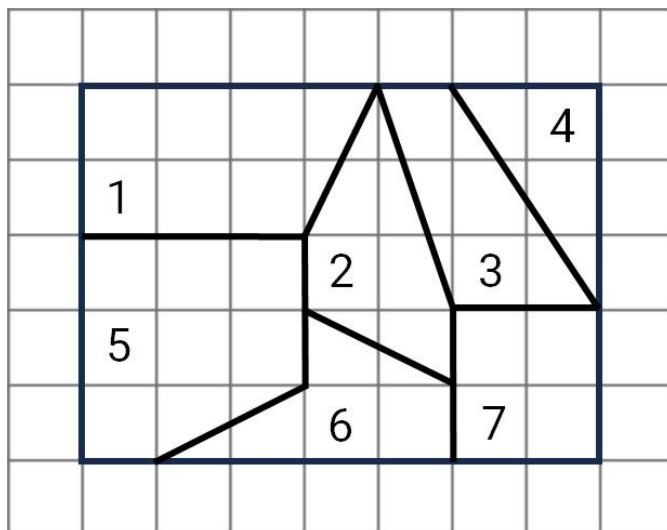
Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

Отец завещал каждому из семи своих сыновей по участку земли, указав следующие условия:

- участок Антона должен иметь общую границу с участками Германа и Елисея;
- часть Влада должна быть вдвое больше участка Германа;
- общая площадь участков Богдана и Елисея должна быть равна площади участка Жени;
- участок Демьяна не должен соседствовать с участком Германа.



Какой участок кому должен достаться, чтобы условия завещания выполнялись?

Ответ:

1	Женя
2	Антон
3	Демьян
4	Богдан
5	Влад

6	Герман
7	Елисей

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

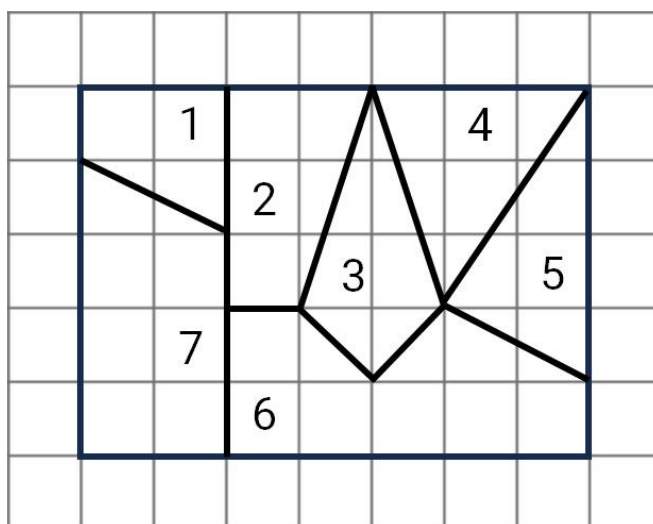
Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.4

Условие:

Отец завещал каждому из семи своих сыновей по участку земли, указав следующие условия:

- участок Алёши должен иметь общий отрезок границы с участками Гриши и Егора;
- Васина часть должна быть вдвое больше участка Гриши;
- общая площадь участков Бориса и Егора должна быть равна площади участка Жени;
- участок Димы не должен иметь общий отрезок границы с участком Гриши.



Какой участок кому должен достаться, чтобы условия завещания выполнялись?

Ответ:

1	Боря
2	Дима
3	Егор
4	Алёша
5	Гриша

6	Вася
7	Женя

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

Четыре синоптика — Аркадий, Борис, Виктор и Григорий — живут на острове Пасхи, где каждый день либо солнечный, либо дождливый, либо ветреный, но не одновременно. В феврале они составили прогноз погоды на март.

Аркадий: «13 дней будут солнечными, 9 дней будут дождливыми, а все остальные — ветреными».

Борис: «9 дней будут ветреными, 11 будут дождливыми, а все остальные — солнечными».

Виктор: «12 дней будут солнечными, 11 дней будут ветреными, а все остальные — дождливыми».

Григорий: «10 дней будут ветреными, 10 дней будут солнечными, а все остальные — дождливыми».

В апреле оказалось, что только один из синоптиков предсказал погоду полностью верно, а все остальные ошиблись и с предсказанием солнечных, и с предсказанием ветреных, и с предсказанием дождливых дней.

Найдите количество солнечных, дождливых и ветреных дней.

Ответ:

Солнечных: 12

Дождливых: 8

Ветреных: 11

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Составим таблицу показаний синоптиков.

	Солнечные	Дождливые	Ветренные
Аркадий	13	9	9
Борис	11	11	9
Виктор	12	8	11
Григорий	10	11	10

Борис и Аркадий дали один прогноз на ветренные дни, они не могут быть оба правы, значит, они оба врут. Значит, дождливых дней точно не 11. Поэтому Григорий тоже врёт. Остаётся только Виктор, он и говорит правду.

Задание № 8.2

Общее условие:

Двадцать обучающихся кружка по шахматам участвовали в турнире, по результатам которого каждый ученик должен был получить разряд. Перед турниром четверо учеников высказали предположения о том, сколько и каких разрядов получат все участники вместе.

Альмира: «Первый разряд получают 9 учеников, а третий — 6 учеников, все остальные получают второй разряд».

Вова: «Второй разряд получают 6 учеников, а третий — 8 учеников, все остальные получают первый».

София: «Первый разряд получают 8 учеников, а второй — 5 учеников, все остальные получают третий».

Кузьма: «Первый разряд получают 5 учеников, а третий — 7 учеников, все остальные получают второй».

После турнира оказалось, что только один из детей правильно предсказал итоги соревнования. А все остальные ученики ошиблись и в количестве тех, кто получит первый разряд, и в количестве тех, кто получит второй разряд, и в количестве тех, кто получит третий разряд.

Условие:

Сколько учеников получили первый разряд?

Ответ: 6

Условие:

Сколько учеников получили второй разряд?

Ответ: 6

Условие:

Сколько учеников получили третий разряд?

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

Жителям Ромашковой Долины подарили коробку с 30 конфетами. Внутри каждой конфеты была одна из трёх начинок: шоколад, ягоды или карамель. Жители сделали свои предположения о количестве конфет каждого вида в коробке.

Крош: «В коробке 8 шоколадных и 10 карамельных конфет, остальные — ягодные».

Ёжик: «В коробке 11 карамельных и 10 шоколадных конфет, остальные — ягодные».

Бараш: «В коробке 9 ягодных и 11 шоколадных конфет, остальные — карамельные».

Нюша: «В коробке 13 карамельных и 11 ягодных конфет, остальные — шоколадные».

Выяснилось, что только один из них оказался прав, а все остальные ошиблись и в количестве шоколадных, и в количестве ягодных, и в количестве карамельных конфет. Сколько было конфет каждого вида?

Ответ:

Шоколадных: 6

Ягодных: 11

Карамельных: 13

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.4

Условие:

Четверо грибников набрали в лесу 40 грибов и положили в одну корзину, в которой лежат подберёзовики, лисички и опята. Каждый грибник высказал мнение о том, сколько грибов каждого вида лежит в корзине. Иван Петрович: «В корзине 12 лисичек и 13 опят, остальные грибы — подберёзовики».

Пётр Петрович: «В корзине 12 опят и 13 подберёзовиков, остальные грибы — лисички».

Пётр Иванович: «В корзине 16 подберёзовиков и 13 лисичек, остальные грибы — опята».

Иван Иванович: «В корзине 14 подберёзовиков и 11 опят, остальные грибы — лисички».

Только один из грибников оказался профессионалом и безошибочно определил вид каждого гриба. Все остальные грибники перепутали и количество лисичек, и количество опят, и количество подберёзовиков. Сколько грибов каждого вида было в корзине?

Ответ:

Подберёзовиков: 15

Лисичек: 12

Опят: 13

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

для 6 класса

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

Незнайка пришёл на день рождения Знайки на 15 минут раньше, чем Гуся, но на 10 минут позже, чем Пончик. Когда праздник закончился, все стали расходиться. Первым дом Знайки покинул Пончик: он ушёл на 20 минут раньше, чем Гуся, и на 7 минут раньше, чем Незнайка. На сколько минут дольше Незнайка был в гостях по сравнению с Гусей?

Ответ: 2

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Незнайка пришёл на 15 минут раньше Гусли.

А Гуся ушёл позже Незнайки на $20 - 7 = 13$ минут.

Значит, Незнайка был в гостях дольше на $15 - 13 = 2$ минуты.

Задание № 1.2

Условие:

Незнайка пришёл на день рождения Знайки на 10 минут раньше, чем Пилюлькин, но на 15 минут позже, чем Сиропчик. Когда праздник закончился, все стали расходиться. Первым дом Знайки покинул Пилюлькин: он ушёл на 18 минут раньше, чем Сиропчик, и на 5 минут раньше, чем Незнайка. На сколько минут дольше Сиропчик был в гостях по сравнению с Незнайкой?

Ответ: 28

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

Бетан пришла на день рождения Малыша на 20 минут раньше, чем Гунилла, но на 10 минут позже, чем Карлсон. Когда праздник закончился, все стали расходиться. Первым дом Малыша покинул Карлсон: он улетел на 30 минут раньше, чем Бетан, и на 7 минут раньше, чем Гунилла. На сколько минут дольше Бетан была в гостях по сравнению с Гуниллой?

Ответ: 43

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.4

Условие:

Винни-Пух пришёл на день рождения ослика Иа-Иа на 15 минут раньше, чем Пятачок, но на 5 минут позже, чем Кролик. Когда праздник закончился, все стали расходиться. Первым праздник покинул Кролик: он ушёл на 20 минут раньше, чем Пятачок, и на 17 минут раньше, чем Винни-Пух. На сколько минут дольше Винни-Пух был в гостях по сравнению с Кроликом?

Ответ: 12

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

Имеется 10 коробок, в каждую из которых положили синие и красные шарики так, что в каждой коробке есть хотя бы один синий и хотя бы один красный шарик. Коля нашёл разницу между количеством шаров разных цветов в каждой коробке (если они не равны, то из большего вычел меньшее). Эти числа он написал на коробках. Оказалось, что было написано 10 разных чисел. Какое минимальное количество шариков может лежать суммарно во всех коробках?

Ответ: 65

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим, что если числа на коробках не равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, то существует коробка, из которой можно будет вытащить шарик того цвета, которого там больше, и тогда шариков станет меньше, но условие задачи будет выполнено. Поэтому минимальное количество шариков достигается только если на коробках написаны числа от 0 до 9.

В каждой коробке уже есть как минимум 2 шарика, т.к. точно есть синий и красный шарики. Значит, в каждой коробке как минимум $2 + x$ шариков, где x — это число, написанное на коробке (то есть разность между одним цветом и другим). Поэтому минимальное количество шариков

$$2 \cdot 10 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 20 + 45 = 65$$

Пример:

№коробки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Синих	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Красных	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Задание № 2.2

Условие:

Имеется 9 коробок, в каждую из которых положили синие и красные шарики так, что в каждой коробке есть хотя бы один синий и хотя бы один красный шарик. Коля нашёл разницу между количеством шаров разных цветов в каждой коробке (если они не равны, то из большего вычел меньшее). Эти числа он написал на коробках. Оказалось, что было написано 9 разных чисел. Какое минимальное количество шариков может лежать суммарно во всех коробках?

Ответ: 54

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

Имеется 11 коробок, в каждую из которых положили синие и красные шарики так, что в каждой коробке есть хотя бы один синий и хотя бы один красный шарик. Коля нашёл разницу между количеством шаров разных цветов в каждой коробке (если они не равны, то из большего вычел меньшее). Эти числа он написал на коробках. Оказалось, что было написано 11 разных чисел. Какое минимальное количество шариков может лежать суммарно во всех коробках?

Ответ: 77

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.4

Условие:

Имеется 8 коробок, в каждую из которых положили синие и красные шарики так, что в каждой коробке есть хотя бы один синий и хотя бы один красный шарик. Коля нашёл разницу между количеством шаров разных цветов в каждой коробке (если они не равны, то из большего вычел меньшее). Эти числа он написал на коробках. Оказалось, что было написано 8 разных чисел. Какое минимальное количество шариков может лежать суммарно во всех коробках?

Ответ: 44

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

Условие:

Числа 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15 и 30 размещены в клетках таблицы 3×3 . Оказалось, что числа в клетках, соседних по стороне или углу, не являются взаимно простыми. Часть чисел уже расставлена. Расставьте остальные числа.

Ответ:

5	15	3
10	30	6
2	4	12

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Число в центре должно иметь общий делитель со всеми остальными числами. Поэтому это может быть только 30. 5 точно стоит в углу, т.к. её соседи 10, 30 и 15, а ровно 3 соседа может быть только у чисел в углах. Значит, в левом верхнем углу 5 и сверху в середине 15. 3 и 4 не могут быть соседями, поэтому в верхнем правом углу 3. 2 не может соседствовать с 3, поэтому 2 будет в левом нижнем углу. Тогда справа посередине будет 6. Других решений нет.

10			→	5	15	3
	4	12		10	30	6
				2	4	12

Задание № 3.2

Условие:

Числа 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18 и 30 размещены в клетках таблицы 3×3 . Оказалось, что числа в клетках, соседних по стороне или углу, не являются взаимно простыми. Часть чисел уже расставлена. Расставьте остальные числа.

Ответ:

2	6	18
10	30	9
5	15	3

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

Условие:

Числа 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45 и 105 размещены в клетках таблицы 3×3 . Оказалось, что числа в клетках, соседних по стороне или углу, не являются взаимно простыми. Часть чисел уже расставлена. Расставьте остальные числа.

Ответ:

7	21	3
35	105	9
5	15	45

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.4

Условие:

Числа 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 30 и 45 размещены в клетках таблицы 3×3 . Оказалось, что числа в клетках, соседних по стороне или углу, не являются взаимно простыми. Часть чисел уже расставлена. Расставьте остальные числа.

Ответ:

3	6	2
9	30	10
45	15	5

Точное совпадение ответа — 1 балл

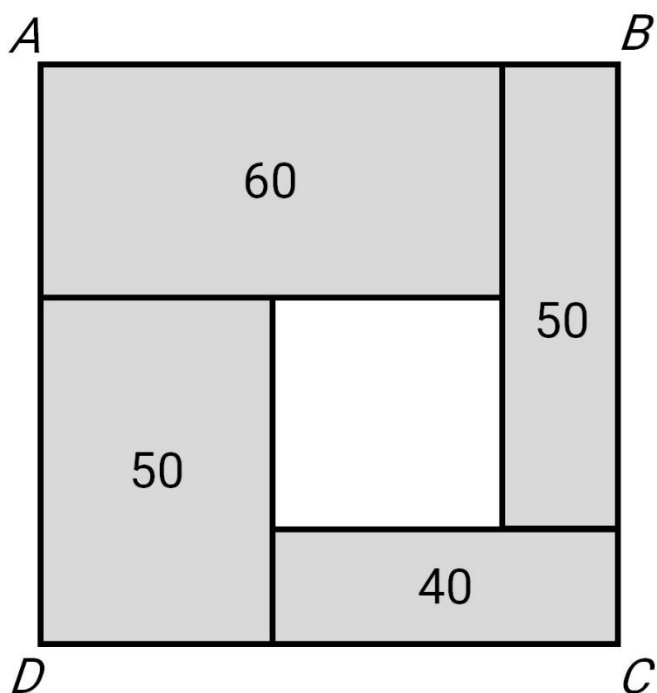
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Условие:

Квадрат ABCD разбит на 1 белый и 4 серых прямоугольника. Периметры серых прямоугольников указаны на картинке, а периметр белого прямоугольника неизвестен.



Чему равна площадь квадрата ABCD?

Ответ: 625

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

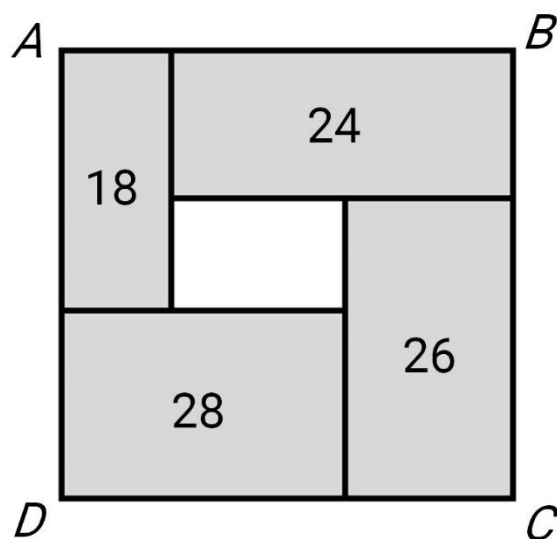
Решение.

Заметим, что периметр квадрата ABCD равен сумме полупериметров серых прямоугольников. Тогда периметр квадрата равен $(60 + 50 + 40 + 50) \div 2 = 100$, а длина одной стороны равна 25. Следовательно, площадь квадрата $25 \cdot 25 = 625$.

Задание № 4.2

Условие:

Квадрат ABCD разбит на 1 белый и 4 серых прямоугольника. Периметры серых прямоугольников указаны на картинке, а периметр белого прямоугольника неизвестен.



Чему равна площадь квадрата ABCD?

Ответ: 144

Точное совпадение ответа — 1 балл

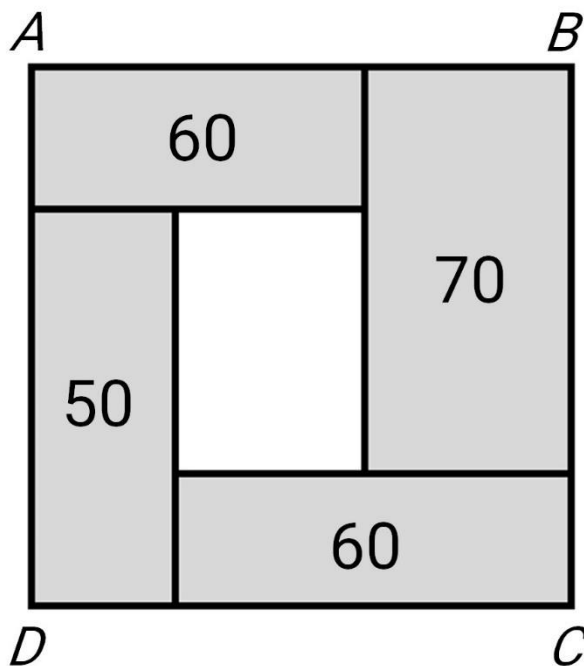
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

Квадрат ABCD разбит на 1 белый и 4 серых прямоугольника. Периметры серых прямоугольников указаны на картинке, а периметр белого прямоугольника неизвестен.



Чему равна площадь квадрата ABCD?

Ответ: 900

Точное совпадение ответа — 1 балл

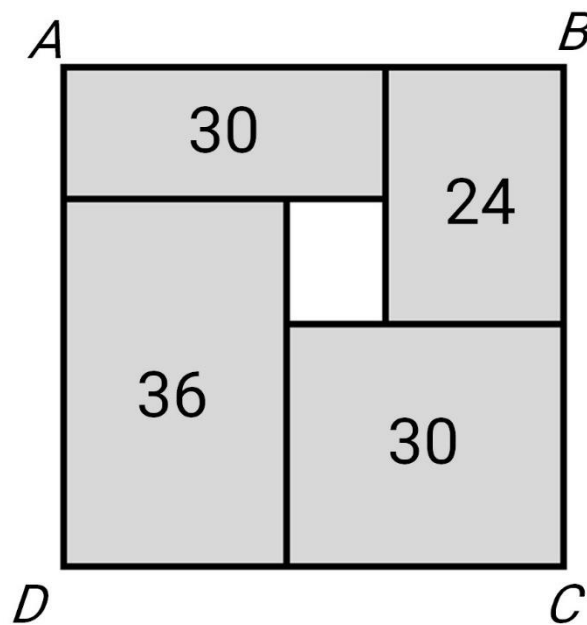
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.4

Условие:

Квадрат ABCD разбит на 1 белый и 4 серых прямоугольника. Периметры серых прямоугольников указаны на картинке, а периметр белого прямоугольника неизвестен.



Чему равна площадь квадрата ABCD?

Ответ: 225

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

На острове Невезения в 5 «ЖУ» классе уроки математики проходят 3 раза в неделю: в понедельник, в среду и в четверг. В той стране мальчики лгут по вторникам, четвергам и субботам, а в остальные дни недели говорят правду. Девочки же, наоборот, говорят правду по вторникам, четвергам и субботам, а в остальные дни недели лгут. Однажды между учениками 5 «ЖУ» класса состоялся диалог:

Маша: «Завтра по расписанию у нас будет математика.»

Стас: «Вчера у нас была математика.»

В какой день недели мог состояться этот диалог?

Ответ:

- ☐ Понедельник
- ☐ Вторник
- ☐ Среда
- ☐ Четверг
- ☒ Пятница
- ☐ Суббота
- ☐ Воскресенье

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Диалог не мог происходить во вторник и четверг, потому что тогда Стас сказал бы правду, а он врёт по вторникам и четвергам. Диалог не мог происходить в понедельник, среду и воскресенье, потому что в эти дни Стас говорит

правду, но накануне этих дней математики не было. Стас мог соврать в субботу, а в пятницу мог сказать правду. Но в субботу Маша должна говорить правду, а она врёт. Поэтому это не суббота. Подходит только пятница.

Задание № 5.2

Условие:

В стране Выученных Уроков в 5 классе уроки математики проходят 3 раза в неделю: в понедельник, во вторник и в четверг. В той стране хорошисты говорят правду по понедельникам, средам, пятницам и воскресеньям, а в остальные дни недели лгут. А троечники говорят правду только по вторникам, четвергам и субботам, а в остальные дни недели лгут. Однажды между хорошисткой Лизой и троечником Гришей состоялся диалог:

Гриша: «Завтра математики не будет.»

Лиза: «Послезавтра по расписанию у нас будет математика.»

В какой день недели мог состояться этот диалог?

Ответ:

- ☐ Понедельник
- ☐ Вторник
- ☐ Среда
- ☐ Четверг
- ☐ Пятница
- ☐ Суббота
- ☒ Воскресенье

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

В стране Невыученных Уроков в 5 классе уроки математики проходят 3 раза в неделю: в понедельник, в четверг и в пятницу. В этом классе девочки говорят правду по понедельникам, вторникам, пятницам и субботам, а в остальные дни недели лгут. Мальчики же, наоборот, лгут по понедельникам, вторникам, пятницам и субботам, а в остальные дни недели говорят правду. Однажды между учениками этого класса состоялся диалог:

Дима: «Завтра вторник.»

Алиса: «Позавчера у нас была математика.»

В какой день недели мог состояться этот диалог?

Ответ:

- ☐ Понедельник
- ☐ Вторник
- ☐ Среда
- ☐ Четверг
- ☐ Пятница
- ☒ Суббота
- ☐ Воскресенье

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.4

Условие:

На острове Запутанных Фраз в 5 классе уроки математики проходят 3 раза в неделю: во вторник, в четверг и в пятницу. В этом классе хорошисты говорят правду по вторникам, средам, субботам и воскресеньям, а в остальные дни недели лгут. А троечники говорят правду только по понедельникам, четвергам и пятницам, а в остальные дни недели лгут. Однажды между хорошистом Никитой и троечником Семёном состоялся диалог:

Семён: «Завтра математики не будет.»

Никита: «Вчера была математика.»

В какой день недели мог состояться этот диалог?

Ответ:

- ☐ Понедельник
- ☐ Вторник
- ☒ Среда
- ☐ Четверг
- ☐ Пятница
- ☐ Суббота
- ☐ Воскресенье

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

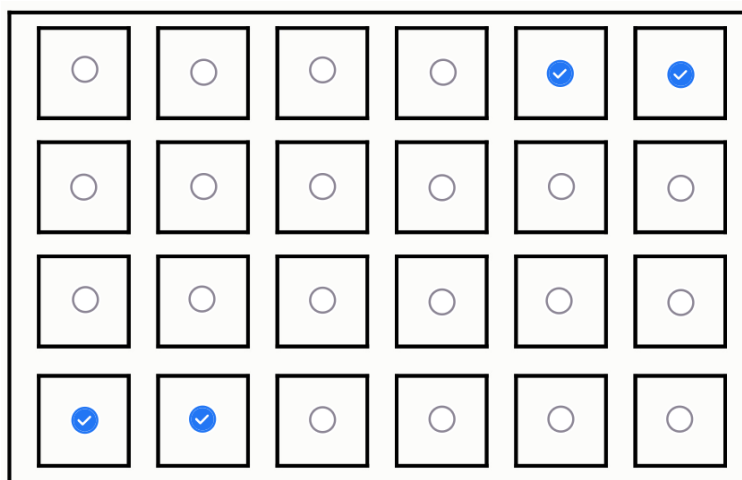
Задание № 6.1

Условие:

Винтик и Шпунтик живут в микрорайоне, где все дома выстроены в виде прямоугольного квартала с прямыми улицами, как показано на рисунке. На этой карте изображены все дома микрорайона.

Однажды Винтик вышел из своего дома, сразу повернул направо, прошёл мимо 3 домов (не считая своего дома), повернул направо, прошёл мимо 2 домов, повернул налево, через дом — ещё раз налево, потом прошёл ещё мимо 3 домов. Следующий дом впереди слева был домом Шпунтика. В каком доме может жить Шпунтик? Выберите все возможные варианты. По улицам — границам микрорайона — тоже можно ходить.

Ответ:



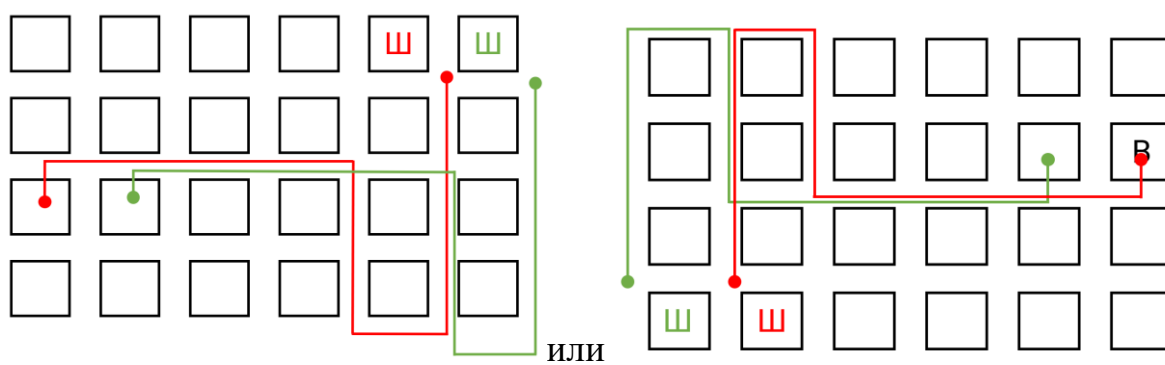
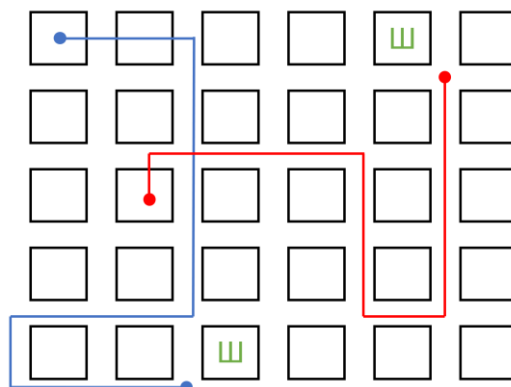
Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Добавим домов на рисунке и нарисуем маршрут Винтика от произвольного дома. Заметим, что всего есть четыре варианта такого маршрута, но для всех маршрутов вдоль одного направления должно быть не меньше пяти домов,

а вдоль другого — не меньше четырёх. Рассматривая план района, видим, что вариантов расположения домов четыре.



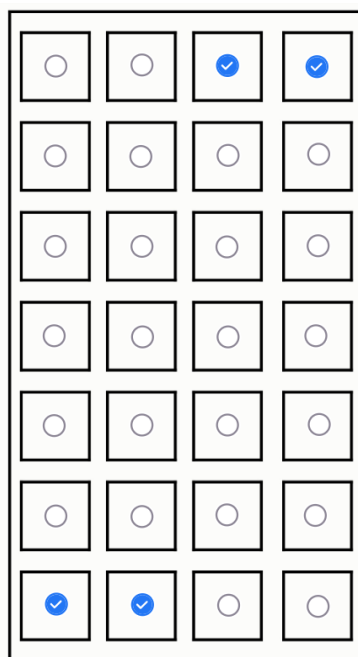
Задание № 6.2

Условие:

Винтик и Шпунтик живут в микрорайоне, где все дома выстроены в виде прямоугольного квартала с прямыми улицами, как показано на рисунке. На этой карте изображены все дома микрорайона.

Однажды Винтик вышел из своего дома, сразу повернул налево, прошёл мимо 2 домов (не считая своего дома), повернул направо, прошёл мимо 4 домов, повернул ещё раз направо, через 2 дома — ещё раз налево, потом прошёл ещё мимо одного дома. Следующий дом впереди справа был домом Шпунтика. В каком доме может жить Шпунтик? Выберите все возможные варианты. По улицам — границам микрорайона — тоже можно ходить.

Ответ:



Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

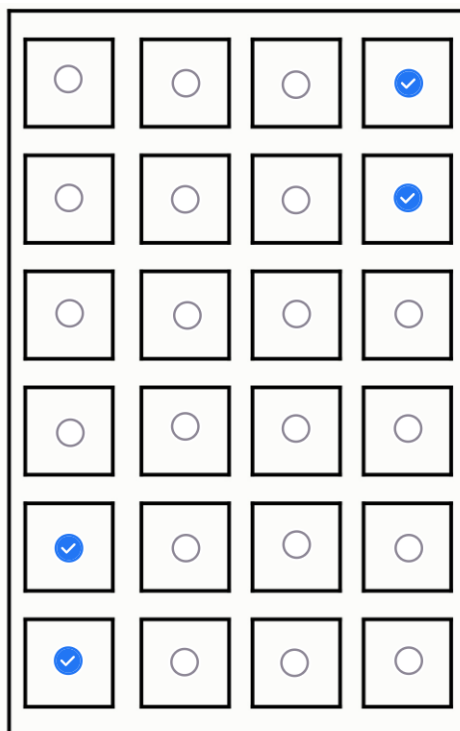
Задание № 6.3

Условие:

Винтик и Шпунтик живут в микрорайоне, где все дома выстроены в виде прямоугольного квартала с прямыми улицами, как показано на рисунке. На этой карте изображены все дома микрорайона.

Однажды Винтик вышел из своего дома, сразу повернул направо, прошёл мимо своего и ещё одного дома, повернул направо, прошёл мимо 2 домов, снова повернул налево, прошёл ещё 3 дома, повернул направо, потом прошёл ещё мимо одного дома. Следующий дом впереди справа был домом Шпунтика. В каком доме может жить Шпунтик? Выберите все возможные варианты. По улицам — границам микрорайона — тоже можно ходить.

Ответ:



Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

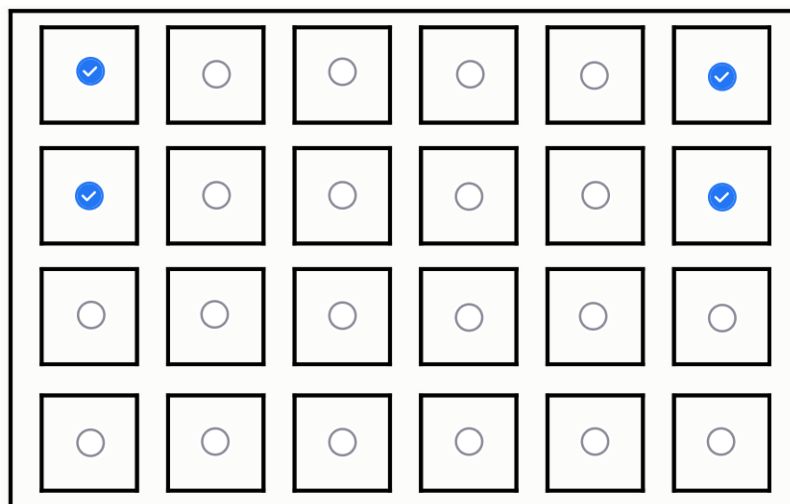
Задание № 6.4

Условие:

Винтик и Шпунтик живут в микрорайоне, где все дома выстроены в виде прямоугольного квартала с прямыми улицами, как показано на рисунке. На этой карте изображены все дома микрорайона.

Однажды Винтик вышел из своего дома, сразу повернул налево, прошёл мимо 2 домов (не считая своего дома), повернул направо, прошёл мимо 3 домов, повернул снова направо, через дом — ещё раз налево, потом прошёл ещё мимо одного дома. Следующий дом впереди слева был домом Шпунтика. В каком доме может жить Шпунтик? Выберите все возможные варианты. По улицам — границам микрорайона — тоже можно ходить.

Ответ:



Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

На всероссийском съезде огородников собралось 100 человек. Каждый на своём огороде посадил что-то одно: помидоры, салат или редис. Репортёр всем присутствующим задал три вопроса. Хитрые огородники во всех своих ответах соврали, а честные — сказали правду. На вопрос «В этом году вы сажали помидоры?» утвердительный ответ дали 97 человек, на вопрос «Сажали ли вы салат?» утвердительный ответ дали 33 человека, а на вопрос «Сажали ли вы редис?» ответили «Да» 28 человек.

Сколько всего честных огородников было на съезде?

Ответ: 42

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим, что каждый честный огородник ответил «да» на один из приведённых вопросов, а каждый нечестный — на два. Учитывая, что всего ответов «да» $97 + 33 + 28 = 158$, то 58 «лишних» ответов «да» взялись из обманывающих огородников. Значит, честных было $100 - 58 = 42$.

Задание № 7.2

Условие:

На всероссийском съезде огородников собралось 110 человек. Каждый на своём огороде посадил что-то одно: помидоры, салат или редис. Репортёр всем присутствующим задал три вопроса. Хитрые огородники во всех своих ответах соврали, а честные — сказали правду. На вопрос «В этом году вы сажали помидоры?» утвердительный ответ дали 57 человек, на вопрос «Сажали ли вы салат?» утвердительный ответ дали 38 человек, а на вопрос «Сажали ли вы редис?» ответили «Да» 69 человек.

Сколько всего честных огородников было на съезде?

Ответ: 56

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

На всероссийском съезде сладкоежек собралось 100 человек. Каждый из них отдаёт предпочтение одной сладости: шоколаду, мороженому или мармеладу. Репортёр всем присутствующим задал три вопроса. Хитрые сладкоежки во всех своих ответах соврали, а честные — сказали правду. На вопрос «Ваша любимая сладость — мороженое?» утвердительный ответ дали 47 человек, на вопрос «Вы больше всего любите мармелад?» утвердительный ответ дали 69 человек, а на вопрос «Вы предпочитаете шоколад?» ответили «Да» 35 человек.

Сколько всего честных сладкоежек было на съезде?

Ответ: 49

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.4

Условие:

На всероссийском съезде сладкоежек собралось 110 человек. Каждый из них отдаёт предпочтение одной сладости: шоколаду, мороженому или мармеладу. Репортёр всем присутствующим задал три вопроса. Хитрые сладкоежки во всех своих ответах соврали, а честные — сказали правду. На вопрос «Ваша любимая сладость — мороженое?» утвердительный ответ дали 68 человек, на вопрос «Вы больше всего любите мармелад?» утвердительный ответ дали 37 человек, а на вопрос «Вы предпочитаете шоколад?» ответили «Да» 39 человек.

Сколько всего честных сладкоежек было на съезде?

Ответ: 76

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

Из пяти различных цифр Егор составил пятизначное число. Взяв оставшиеся пять цифр, Виталик тоже составил из них пятизначное число. (Числа не могут начинаться с 0). Вика сложила числа мальчиков. Какие из следующих утверждений верны?

Ответ:

- ✓ Могло получиться шестизначное число
- Могло получиться семизначное число
- ✓ Могло получиться число, у которого все цифры одинаковые
- Могло получиться число, у которого все цифры разные и все чётные
- Могло получиться число, у которого все цифры разные и все нечётные

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

1) Например, $97543 + 86210 = 183753$.

2) Не могло. Доказательство:

Максимальная сумма двух пятизначных чисел это сумма $99999 + 99999 = 199998$ — шестизначное число. Все остальные суммы меньше, поэтому получить семизначное число невозможно.

3) Например, $12340 + 87659 = 99999$.

4) Не могло. Доказательство:

Предположим, такое случилось: нашлись два пятизначных числа, соответствующих условию задачи и их сумма число, записанное разными чётными цифрами. Тогда это пятизначное число, записанное цифрами 2, 4, 6, 8, 0. Тогда это число не делится на 3, как бы мы эти цифры не переставляли, поскольку сумма $2 + 4 + 6 + 8 + 0 = 20$ и она на 3 не делится. С другой стороны, сумма двух

чисел, составленных из всех 10 цифр, на 3 делится, если одно число при делении на 3 дает остаток a , то второе число дает остаток $3 - a$. — противоречие.

5) Не могло. Доказательство:

Предположим, такое случилось: нашлись два пятизначных числа, соответствующих условию задачи и их сумма число, записанное разными нечетными цифрами. Тогда это пятизначное число, записанное цифрами 1, 3, 5, 7, 9. Тогда это число не делится на 3, как бы мы эти цифры не переставляли, поскольку сумма $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ и она на 3 не делится. С другой стороны, сумма двух чисел, составленных из всех 10 цифр, на 3 делится, если одно число при делении на 3 дает остаток a , то второе число дает остаток $3 - a$. — противоречие.

Задание № 8.2

Общее условие:

Из пяти различных цифр Коля составил пятизначное число. Взяв оставшиеся пять цифр, Петя тоже составил из них пятизначное число. (Числа не могут начинаться с 0). Вика сложила числа мальчиков. Какие из следующих утверждений верны?

Ответ:

- ✓ Могло получиться пятизначное число
- Могло получиться семизначное число
- ✓ Могло получиться число, у которого все цифры одинаковые
- Могло получиться число, у которого все цифры разные и все чётные
- Могло получиться число, у которого все цифры разные и все нечётные

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

Из пяти различных цифр Стёпа составил пятизначное число. Взяв оставшиеся пять цифр, Рома тоже составил из них пятизначное число. (Числа не могут начинаться с 0). Вика сложила числа мальчиков. Какие из следующих утверждений верны?

Ответ:

- ✓ Могло получиться пятизначное число
- ✓ Могло получиться шестизначное число
- ✓ Могло получиться число, у которого все цифры одинаковые
- Могло получиться число, у которого все цифры разные и все чётные
- Могло получиться число, у которого все цифры разные и все нечётные

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.4

Условие:

Из пяти различных цифр Алик составил пятизначное число. Взяв оставшиеся пять цифр, Гоша тоже составил из них пятизначное число. (Числа не могут начинаться с 0). Вика сложила числа мальчиков. Какие из следующих утверждений верны?

Ответ:

- ☐ Могло получиться семизначное число
- ☒ Могло получиться шестизначное число
- ☒ Могло получиться число, у которого все цифры одинаковые
- ☐ Могло получиться число, у которого все цифры разные и все чётные
- ☐ Могло получиться число, у которого все цифры разные и все нечётные

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

**Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике
для 7 класса**

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

Лена начала выписывать в порядке возрастания все числа, для которых одновременно выполняются следующие условия:

- состоят только из цифр 1 и 7;
- имеют столько же единиц, сколько семёрок;
- делятся на 3.

Какое число у Лены стоит на втором месте?

Ответ: 117177

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Если в числе одна единица и одна семёрка, то оно не делится на 3 (сумма цифр равна 8). Аналогично, если в числе по две единицы и семёрки. Число из трёх единиц и трёх семёрок будет делиться на 3 при любом расположении цифр. Наименьшее такое число — 111777, следующее — 117177. Это и будет ответом.

Задание № 1.2

Условие:

Андрей начал выписывать в порядке возрастания все числа, для которых одновременно выполняются следующие условия:

- состоят только из цифр 1 и 4;
- имеют столько же единиц, сколько четвёрок;
- делятся на 3.

Какое число у Андрея стоит на втором месте?

Ответ: 114144

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

Виталик начал выписывать в порядке возрастания все числа, для которых одновременно выполняются следующие условия:

- состоят только из цифр 2 и 5;
- имеют столько же двоек, сколько пятёрок;
- делятся на 3.

Какое число у Виталика стоит на втором месте?

Ответ: 225255

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.4

Условие:

Костя начал выписывать в порядке возрастания все числа, для которых одновременно выполняются следующие условия:

- состоят только из цифр 5 и 8;
- имеют столько же пятёрок, сколько восьмёрок;
- делятся на 3.

Какое число у Кости стоит на втором месте?

Ответ: 558588

Точное совпадение ответа — 1 балл

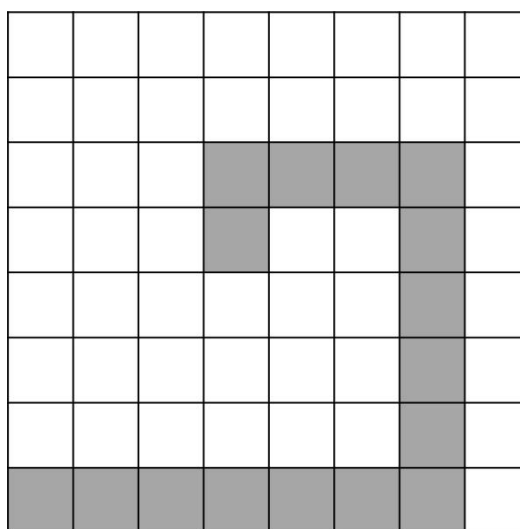
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

Андрей отправился гулять по квадрату 100×100 , от левого нижнего угла к центру. Сперва он идёт по нижней строке до предпоследнего столбца, поворачивает налево, доходит до третьей сверху строки, поворачивает налево, доходит до четвёртого слева столбца и т. д., пока не окажется в одной из четырёх центральных клеток. На рисунке изображён такой путь для доски 8×8 , он состоит из 16 клеток.



Определите длину пути для доски 100×100 .

Ответ: 2500

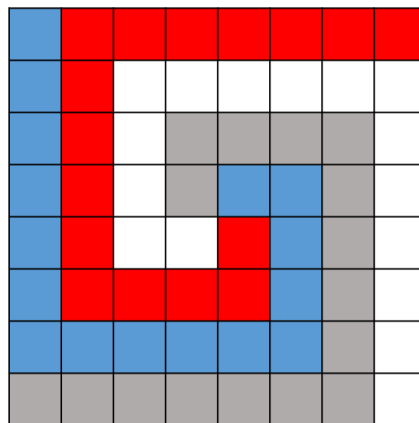
Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Способ 1:

Нарисуем требуемую фигуру и три раза повернём её на 90 градусов относительно центра доски. На рисунке приведена картинка для аналогичной операции для квадрата 8×8 .



Полученные четыре равные фигуры являются разбиением квадрата 100×100 , а значит, одна фигура занимает четверть квадрата, т.е. 2500 клеток.

Способ 2:

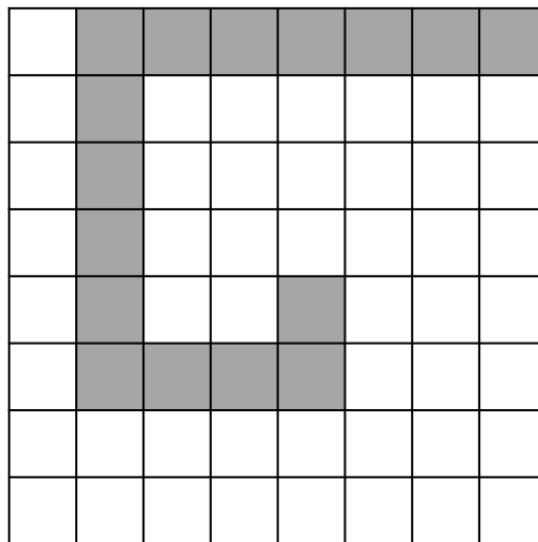
В первом (горизонтальном) ряду 99 клеток. После каждого поворота число новых покрашенных клеток на прямом участке пути отличается от предыдущего прямого участка на две клетки: он начинается на одну клетку позже предыдущего и заканчивается на одну клетку раньше. Таким образом, площадь фигуры будет равна:

$$99 + 97 + 95 + \dots + 3 + 1 = (99 + 1) + (97 + 3) + \dots + (51 + 49) = 100 \cdot 25 = 2500.$$

Задание № 2.2

Условие:

Дима отправился гулять по квадрату 200×200 , от правого верхнего угла к центру. Сперва он идёт по верхней строке до второго столбца, поворачивает налево, доходит до третьей снизу строки, поворачивает налево, доходит до четвёртого справа столбца и т. д., пока не окажется в одной из четырёх центральных клеток. На рисунке изображён такой путь для доски 8×8 , и он состоит из 16 клеток.



Определите длину пути для доски 200×200 .

Ответ: 10000

Точное совпадение ответа — 1 балл

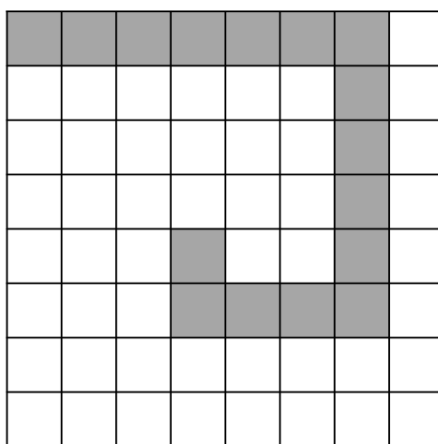
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

Дима отправился гулять по квадрату 80×80 , от левого верхнего угла к центру. Сперва он идёт по верхней строке до предпоследнего столбца, поворачивает направо, доходит до третьей снизу строки, поворачивает направо, доходит до четвёртого слева столбца и т. д., пока не окажется в одной из четырёх центральных клеток. На рисунке изображён такой путь для доски 8×8 , он состоит из 16 клеток.



Определите длину пути для доски 80×80 .

Ответ: 1600

Точное совпадение ответа — 1 балл

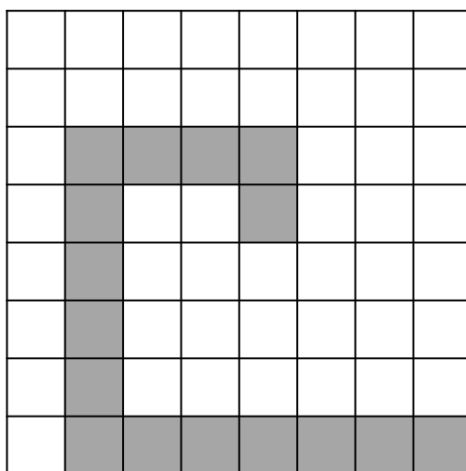
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.4

Условие:

Дима отправился гулять по квадрату 60×60 , от правого нижнего угла к центру. Сперва он идёт по нижней строке до второго столбца, поворачивает направо, доходит до третьей сверху строки, поворачивает направо, доходит до четвёртого справа столбца и т. д., пока не окажется в одной из четырёх центральных клеток. На рисунке изображён такой путь для доски 8×8 , он состоит из 16 клеток.



Определите длину пути для доски 60×60 .

Ответ: 900

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

Условие:

Имеется 9 коробок, в каждую из которых положили синие и красные шарики, так что в каждой коробке есть хотя бы один синий и хотя бы один красный шарик. Коля нашёл разницу между количеством шариков разных цветов в каждой коробке (если они не равны, то из большего вычел меньшее). Эти числа написал на коробках. Оказалось, что было написано 9 разных чисел. Какое минимальное количество шариков может лежать суммарно во всех коробках, если известно, что общее количество красных шариков такое же, как общее количество синих?

Ответ: 54

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Выкинем из каждой коробки по два шарика: один красный и один синий (всего выкинули 18 шариков). Если в какой-то коробке есть и синие, и красные шарики, то выкинем из неё один синий и один красный — разность будет та же, а общее количество уменьшится. Тогда, если мы хотим получить минимальное суммарное количество шариков, то в каждой коробке будут лежать либо только синие, либо только красные шарики (либо пусто). Теперь мы получили, что число на коробке это и есть количество шариков в этой коробке. Поэтому минимальное количество шариков окажется, если на коробках будут написаны числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Их сумма равна 36. Добавляя выкинутые 18 шариков получим, что количество шариков было не меньше, чем $36 + 18 = 54$. Пример расположения шариков по коробкам:

	Количество синих шариков	Количество красных шариков	Числа на коробках
Первая коробка	1	1	0
Вторая коробка	2	1	1
Третья коробка	3	1	2
Четвёртая коробка	1	4	3
Пятая коробка	1	5	4
Шестая коробка	1	6	5
Седьмая коробка	1	7	6
Восьмая коробка	8	1	7
Девятая коробка	9	1	8
Количество шариков во всех коробках	27	27	

Задание № 3.2

Условие:

Имеется 8 коробок, в каждую из которых положили синие и красные шарики, так что в каждой коробке есть хотя бы один синий и хотя бы один красный шарик. Коля нашёл разницу между количеством шариков разных цветов в каждой коробке (если они не равны, то из большего вычел меньшее). Эти числа написал на коробках. Оказалось, что было написано 8 разных чисел. Какое минимальное количество шариков может лежать суммарно во всех коробках, если известно, что общее количество красных шариков такое же, как общее количество синих?

Ответ: 44

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

Условие:

Имеется 12 коробок, в каждую из которых положили синие и красные шарики, так что в каждой коробке есть хотя бы один синий и хотя бы один красный шарик. Коля нашёл разницу между количеством шариков разных цветов в каждой коробке (если они не равны, то из большего вычел меньшее). Эти числа написал на коробках. Оказалось, что было написано 12 разных чисел. Какое минимальное количество шариков может лежать суммарно во всех коробках, если известно, что общее количество красных шариков такое же, как общее количество синих?

Ответ: 90

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.4

Условие:

Имеется 13 коробок, в каждую из которых положили синие и красные шарики, так что в каждой коробке есть хотя бы один синий и хотя бы один красный шарик. Коля нашёл разницу между количеством шариков разных цветов в каждой коробке (если они не равны, то из большего вычел меньшее). Эти числа написал на коробках. Оказалось, что было написано 13 разных чисел. Какое минимальное количество шариков может лежать суммарно во всех коробках, если известно, что общее количество красных шариков такое же, как общее количество синих?

Ответ: 104

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Общее условие:

В одной комнате собрались 5 девочек: Аня, Белла, Вера, Галя и Даша — и подсчитали количество съеденных ими за неделю конфет. Оказалось, что если из комнаты выйдет Аня, то среднее арифметическое количества съеденных за неделю конфет четырёх оставшихся девочек будет равно 64. Аналогично без Беллы это число будет равно 52, без Веры — 46, без Гали — 60, без Даши — 58.

Условие:

Как зовут девочку, которая съела больше всего конфет за эту неделю?

Ответ:

- ☐ Аня
- ☐ Белла
- ☒ Вера
- ☐ Галя
- ☐ Даша

Условие:

Сколько конфет она съела?

Ответ: 96

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим, что после выхода из комнаты Веры среднее арифметическое становится равным самому маленькому значению. Значит, больше всех съела Вера.

Также заметим, что учетверённое среднее арифметическое съеденных конфет без Ани равно сумме съеденных конфет четырьмя девочками без Ани. Аналогично заметить про остальных девочек. Поэтому, учетверённая сумма $64 + 52 + 46 + 60 + 58$ равна учетверённой сумме съеденных конфет всеми пятью девочками. Тогда сумма $64 + 52 + 46 + 60 + 58$ равна сумме съеденных конфет всеми пятью девочками. Осталось вычесть из этой суммы $4 \cdot 46$ — сумму съеденных конфет четырьмя девочками без Веры. Получим $64 + 52 + 46 + 60 + 58 - 4 \cdot 46 = 96$. Столько конфет съела Вера.

Задание № 4.2

Общее условие:

В одной комнате собрались 5 девочек: Аня, Белла, Вера, Галя и Даша — и подсчитали количество съеденных ими за неделю конфет. Оказалось, что если из комнаты выйдет Аня, то среднее арифметическое количества съеденных за неделю конфет четырёх оставшихся девочек будет равно 59. Аналогично без Беллы это число будет равно 53, без Веры — 57, без Гали — 56, без Даши — 45.

Условие:

Как зовут девочку, которая съела больше всего конфет за эту неделю?

Ответ:

- ☐ Аня
- ☐ Белла
- ☐ Вера
- ☐ Галя
- ☒ Даша

Условие:

Сколько конфет она съела?

Ответ: 90

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Общее условие:

В одной комнате собрались 5 девочек: Аня, Белла, Вера, Галя и Даша — и подсчитали количество съеденных ими за неделю конфет. Оказалось, что если из комнаты выйдет Аня, то среднее арифметическое количества съеденных за неделю конфет четырёх оставшихся девочек будет равно 67. Аналогично без Беллы это число будет равно 63, без Веры — 69, без Гали — 70, без Даши — 61.

Условие:

Как зовут девочку, которая съела меньше всего конфет за эту неделю?

Ответ:

- ☐ Аня
- ☐ Белла
- ☐ Вера
- ☒ Галя
- ☐ Даша

Условие:

Сколько конфет она съела?

Ответ: 50

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.4

Общее условие:

В одной комнате собрались 5 девочек: Аня, Белла, Вера, Галя и Даша — и подсчитали количество съеденных ими за неделю конфет. Оказалось, что если из комнаты выйдет Аня, то среднее арифметическое количества съеденных за неделю конфет четырёх оставшихся девочек будет равно 59. Аналогично без Беллы это число будет равно 53, без Веры — 57, без Гали — 56, без Даши — 45.

Условие:

Как зовут девочку, которая съела меньше всего конфет за эту неделю?

Ответ:

- ☒ Аня
- ☐ Белла
- ☐ Вера
- ☐ Галя
- ☐ Даша

Условие:

Сколько конфет она съела?

Ответ: 34

Точное совпадение ответа — 1 балл

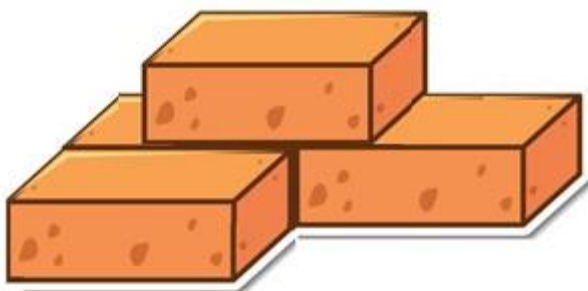
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

Из четырёх одинаковых кирпичей сложили конструкцию, как показано на рисунке. Известно, что суммарная площадь поверхности этой конструкции (сверху, снизу, со всех боков) равна 894 см^2 . Найдите площадь поверхности одного кирпича. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



Ответ: 298

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

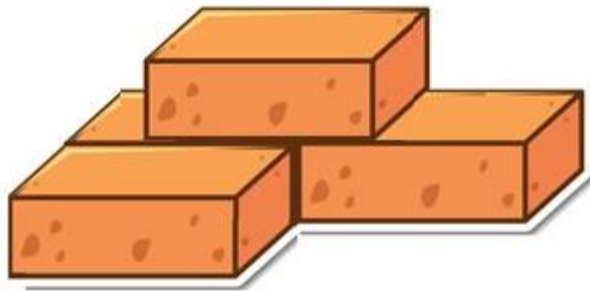
Решение.

Заметим, что при составлении этой конструкции участвуют все три вида сторон кирпича (верхняя, равная нижней, левая, равная правой, и передняя, равная задней). Просуммируем площади поверхностей четырёх кирпичей. При соприкосновении нужно вычесть дважды площади соприкосновения. Поэтому площадь суммы поверхностей конструкции из четырёх кирпичей уменьшается ровно на площадь поверхности одного кирпича. Значит, 894 равно суммарной площади поверхностей трёх кирпичей, тогда искомая площадь одного кирпича равна: $894 \div 3 = 298$.

Задание № 5.2

Условие:

Из четырёх одинаковых кирпичей сложили конструкцию, как показано на рисунке. Известно, что суммарная площадь поверхности этой конструкции (сверху, снизу, со всех боков) равна 756 см^2 . Найдите площадь поверхности одного кирпича. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



Ответ: 252

Точное совпадение ответа — 1 балл

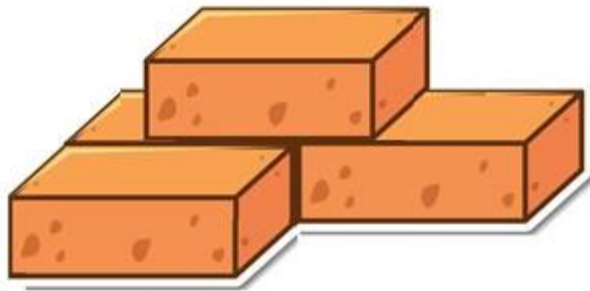
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

Из четырёх одинаковых кирпичей сложили конструкцию, как показано на рисунке. Известно, что суммарная площадь поверхности этой конструкции (сверху, снизу, со всех боков) равна 816 см^2 . Найдите площадь поверхности одного кирпича. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



Ответ: 272

Точное совпадение ответа — 1 балл

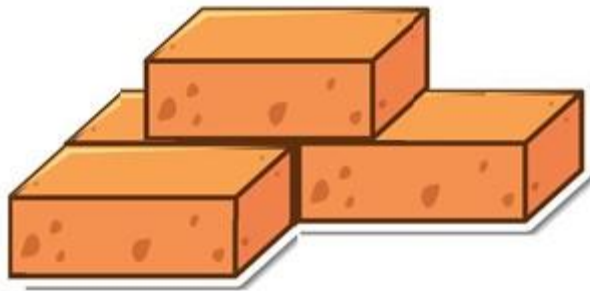
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.4

Условие:

Из четырёх одинаковых кирпичей сложили конструкцию, как показано на рисунке. Известно, что суммарная площадь поверхности этой конструкции (сверху, снизу, со всех боков) равна 2496 см^2 . Найдите площадь поверхности одного кирпича. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



Ответ: 832

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 4

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Общее условие:

Барабашка живёт враздевалке, где стоят шкафчики с номерами от 67 до 79. Однажды ночью Барабашка занялся колдовством: он стал произносить вслух числа натурального ряда, начиная с 1. При этом, если номер шкафчика делится на называемое число, то шкафчик подпрыгивает один раз, в противном случае стоит смирно. Безобразия прекратились, как только было произнесено число, в ответ на которое ни один шкафчик не среагировал.

Условие:

Какое это было число?

Ответ: 16

Условие:

Шкафчик с каким номером подпрыгнул наибольшее число раз?

Ответ: 72

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

В указанном диапазоне номеров шкафчиков всего 13 чисел, а значит, среди них обязательно встретится хотя бы одно число, делящееся нацело на какое-то из чисел от 1 до 13. Посмотрим на число 14. На него делится число 70, а на число 15 делится число 75. На число 16 уже не делится никакое из указанных чисел. Поэтому всё завершится на числе 16. Как найти число, имеющее наибольшее количество делителей среди чисел от 1 до 15? Выпишем наши числа: 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79. Поймем, что числа 67, 71,

73 и 79 имеют среди чисел от 1 до 15 ровно один делитель, а именно 1, так как эти числа простые, но второй делитель (само число) явно больше чисел из диапазона от 1 до 15. Вычеркнем из этого списка простые числа. Тогда останутся числа 68, 69, 70, 72, 74, 75, 76, 77, 78. Представим каждое число, кроме 72, в виде разложения на простые множители. У каждого из этих чисел простых множителей не более 3, учитывая совпадающие. Тогда количество различных делителей у каждого из чисел не более 8, включая само число. Для каждого из множителей два варианта — входит он в наш делитель или нет, откуда число вариантов равно 23. Тогда из интересующего промежутка от 1 до 15 различных делителей не более 7. Число 72 имеет 8 делителей среди чисел от 1 до 15. Это числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12 — всего их восемь. Число вариантов равно 23 — это число вариантов равно 2 в степени 3.

Задание № 6.2

Общее условие:

Барабашка живёт в раздевалке, где стоят шкафчики с номерами от 73 до 89. Однажды ночью Барабашка занялся колдовством: он стал произносить вслух числа натурального ряда, начиная с 1. При этом, если номер шкафчика делится на называемое число, то шкафчик подпрыгивает один раз, в противном случае стоит смирно. Безобразия прекратились, как только было произнесено число, в ответ на которое ни один шкафчик не среагировал.

Условие:

Какое это было число?

Ответ: 18

Условие:

Шкафчик с каким номером подпрыгнул наибольшее число раз?

Ответ: 84

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.3

Общее условие:

Барабашка живёт в раздевалке, где стоят шкафчики с номерами от 93 до 105. Однажды ночью Барабашка занялся колдовством: он стал произносить вслух числа натурального ряда, начиная с 1. При этом, если номер шкафчика делится на называемое число, то шкафчик подпрыгивает один раз, в противном случае стоит смирно. Безобразия прекратились, как только было произнесено число, в ответ на которое ни один шкафчик не среагировал.

Условие:

Какое это было число?

Ответ: 18

Условие:

Шкафчик с каким номером подпрыгнул наибольшее число раз?

Ответ: 96

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.4

Общее условие:

Барабашка живёт в раздевалке, где стоят шкафчики с номерами от 98 до 111. Однажды ночью Барабашка занялся колдовством: он стал произносить вслух числа натурального ряда, начиная с 1. При этом, если номер шкафчика делится на называемое число, то шкафчик подпрыгивает один раз, в противном случае стоит смирно. Безобразия прекратились, как только было произнесено число, в ответ на которое ни один шкафчик не среагировал.

Условие:

Какое это было число?

Ответ: 16

Условие:

Шкафчик с каким номером подпрыгнул наибольшее число раз?

Ответ: 108

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Общее условие:

На дне рождения у Дядьки Черномора присутствовали все 33 богатыря. Черномор угощал их тортом по очереди. Первый богатырь съел $\frac{1}{4}$ всего торта, второй — $\frac{1}{5}$ оставшегося, третий — $\frac{1}{6}$ оставшегося и так далее. Наконец 33-й богатырь съел $\frac{1}{36}$ оставшегося куска, и то, что осталось, съел Черномор.

Условие:

Кто съел больше: первый богатырь или Черномор?

Ответ:

- ✓ Первый богатырь
- Черномор
- Поровну

Условие:

Во сколько раз? Если богатырь и Черномор съели поровну, в ответ запишите 1.

Ответ: 3

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим, что после 1-ого богатыря останется $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ торта.

После второго останется $\frac{4}{5}$ от остатка, то есть $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$.

После третьего останется $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$, и так далее, после последнего богатыря

останется $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{34}{35} \cdot \frac{35}{36}$.

Заметим, что в каждом следующем множителе этого произведения в числителе стоит такое же число, как и в знаменателе предыдущего, значит после сокращения останется только числитель первого множителя и знаменатель последнего,

$$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

$\frac{1}{12} < \frac{1}{4}$, значит первый богатырь съел больше, чем Черномор, причём

$$\text{в } \frac{1}{4} \div \frac{1}{12} = 3 \text{ раза.}$$

Задание № 7.2

Общее условие:

На дне рождения у Дядьки Черномора присутствовали все 33 богатыря. Черномор угощал их тортом по очереди. Первый богатырь съел $\frac{1}{12}$ всего торта, второй — $\frac{1}{13}$ оставшегося, третий — $\frac{1}{14}$ оставшегося и так далее. Наконец 33-й богатырь съел $\frac{1}{44}$ оставшегося куска, и то, что осталось, съел Черномор.

Условие:

Кто съел больше: первый богатырь или Черномор?

Ответ:

- ☐ Первый богатырь
- ☒ Черномор
- ☐ Поровну

Условие:

Во сколько раз? Если богатырь и Черномор съели поровну, в ответ запишите 1.

Ответ: 3

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Общее условие:

На дне рождения у Дядьки Черномора присутствовали все 33 богатыря. Черномор угощал их тортом по очереди. Первый богатырь съел $\frac{1}{16}$ всего торта, второй — $\frac{1}{17}$ оставшегося, третий — $\frac{1}{18}$ оставшегося и так далее. Наконец 33-й богатырь съел $\frac{1}{48}$ оставшегося куска, и то, что осталось, съел Черномор.

Условие:

Кто съел больше: первый богатырь или Черномор?

Ответ:

- ☐ Первый богатырь
- ☒ Черномор
- ☐ Поровну

Условие:

Во сколько раз? Если богатырь и Черномор съели поровну, в ответ запишите 1.

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.4

Общее условие:

На дне рождения у Дядьки Черномора присутствовали все 33 богатыря. Черномор угощал их тортом по очереди. Первый богатырь съел $\frac{1}{32}$ всего торта, второй — $\frac{1}{33}$ оставшегося, третий — $\frac{1}{34}$ оставшегося и так далее. Наконец 33-й богатырь съел $\frac{1}{64}$ оставшегося куска, и то, что осталось, съел Черномор.

Условие:

Кто съел больше: первый богатырь или Черномор?

Ответ:

- ☐ Первый богатырь
- ☒ Черномор
- ☐ Поровну

Условие:

Во сколько раз? Если богатырь и Черномор съели поровну, в ответ запишите 1.

Ответ: 15.5

Точное совпадение ответа — 1 балл

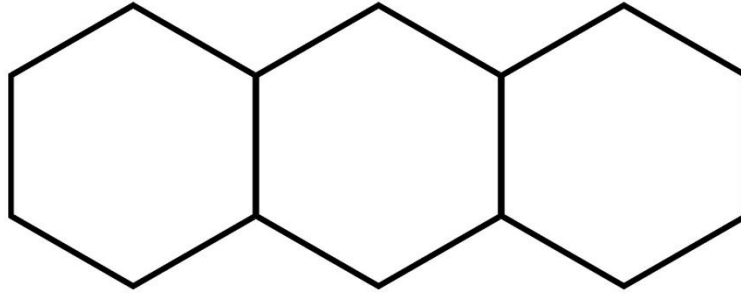
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

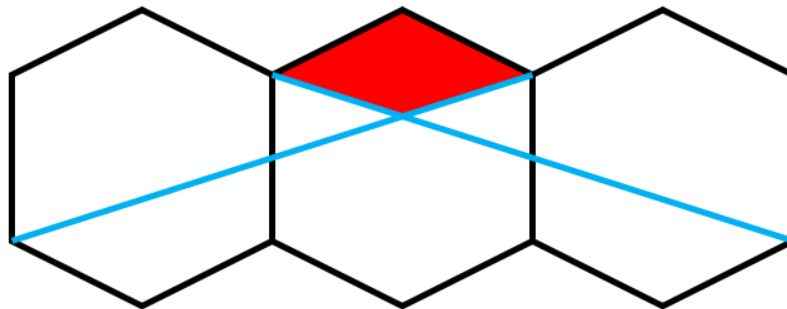
Задание № 8.1

Условие:

Муми-мама испекла три одинаковые пиццы в виде правильного шестиугольника и сложила их рядом, как показано на рисунке.



Муми-тролль сделал два прямых разреза, как на рисунке, и взял себе кусочек, отмеченный красным.



Какую часть одной пиццы взял себе Муми-тролль?

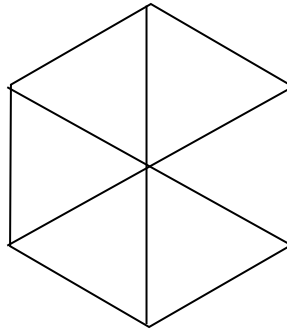
Ответ: $1/4$

Точное совпадение ответа — 1 балл

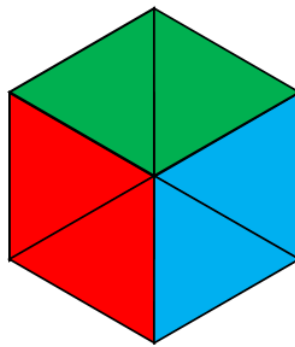
Максимальный балл за задание — 1

Решение.

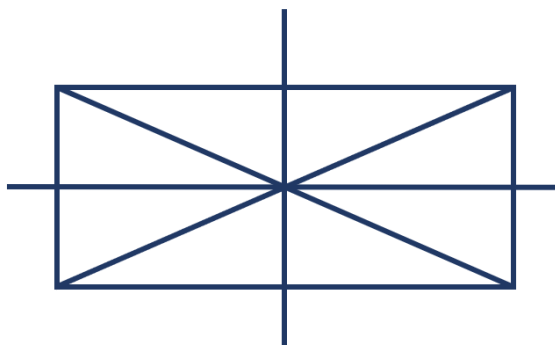
Первый факт. Если в правильном шестиугольнике провести три главные диагонали, то они разобьют его на 6 одинаковых правильных (равносторонних треугольников) – см. рисунок.



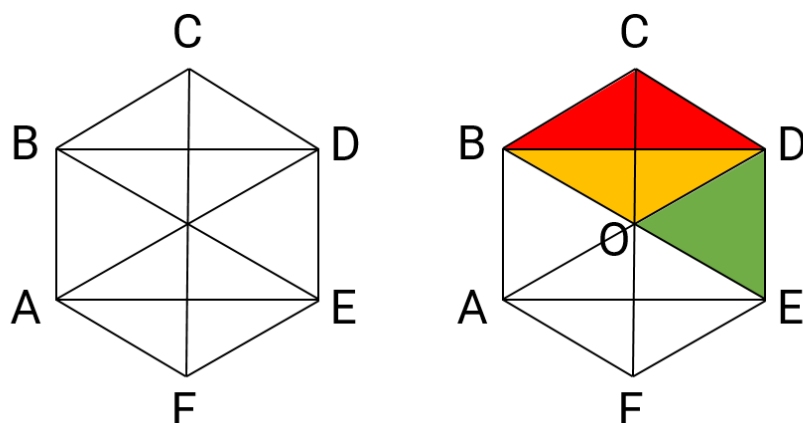
Второй факт Правильный шестиугольник состоит из трёх одинаковых ромбов.



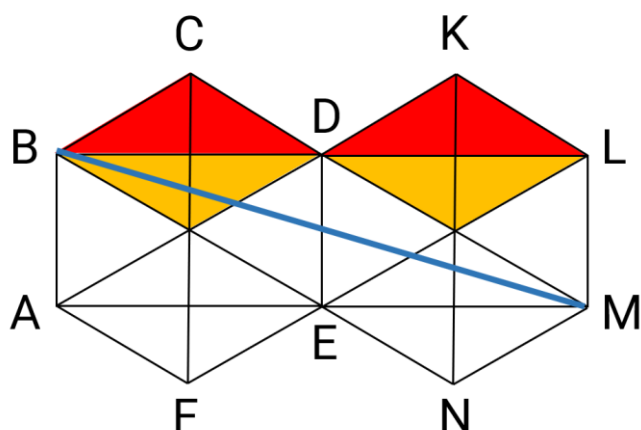
Третий факт. В любом прямоугольнике прямая, параллельная сторонам и проходящая через точку пересечения диагоналей, разбивает прямоугольник на два равных прямоугольника и, следовательно, на два прямоугольника с равной площадью. На следующем рисунке прямые разбивают прямоугольник на 8 равных треугольников



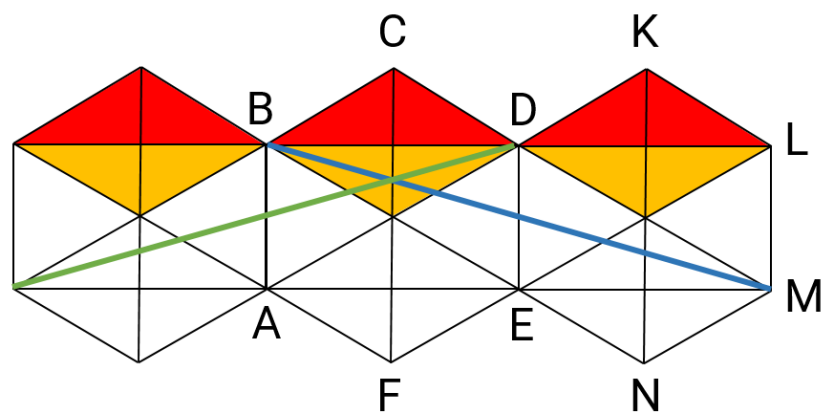
Четвёртый факт. Проведем еще две линии и введем обозначения для удобства.



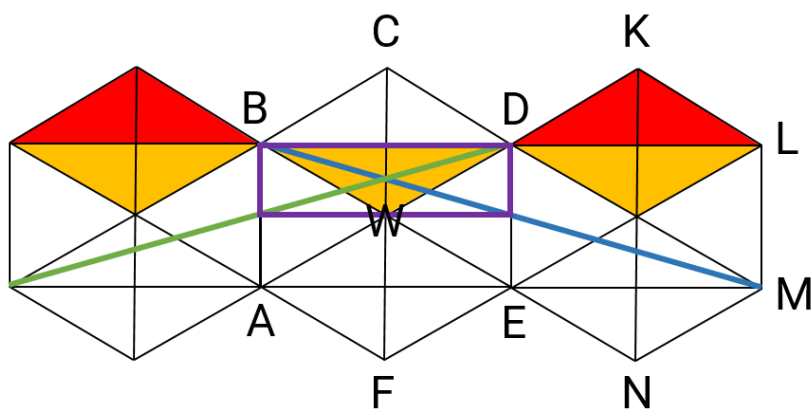
Из свойств правильного треугольника следует, что площади красного треугольника BCD, жёлтого BOD и зелёного ODE равны (и равны половине шестиугольника и шестой части площади исходной одной пиццы). Мы описали все факты, которые потребуются для решения задачи, и теперь можно закончить вычисления.



Рассмотрим две расположенные рядом пиццы. Так как пиццы абсолютно одинаковые, то $BD = DL$, а $AE = EM$ и в прямоугольнике ADLM прямая BM является диагональю, которая делит пополам отрезок DE, параллельный сторонам AB и LM и эта точка пересечения - середина (точка пересечения диагоналей) прямоугольника ABLM. Если провести аналогичную прямую через точку D, то она пройдет через точку пересечения CF и BM, по аналогичным соображениям с использованием 3 факта для прямоугольника, который мы выделяем на картинке ниже сиреневым цветом.



Если теперь выделить в нашей конструкции сиреневый прямоугольник и обозначить точку пересечения его диагоналей как W,

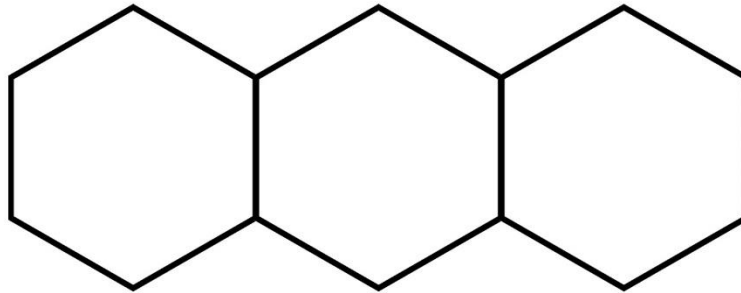


то легко увидеть, что его площадь равна площади двух жёлтых треугольников ($2S_{\triangle} = S_{\blacksquare}$), то есть $1/3$ исходной пиццы, откуда площадь BDW равна $1/12$ (четверть прямоугольника). Половинка одного ромба BCDW равна $1/6$ всей пиццы, а четвертая часть сиреневого прямоугольника, т.е. $1/4$ от $1/3$ равна $1/12$, осталось найти сумму указанных частей, а именно сумму площадей треугольников BCD и BDW, т.е. $S_{\triangle BCD} + S_{\triangle BDW} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

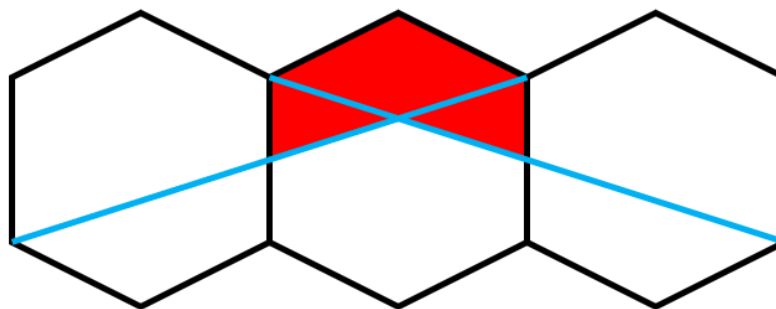
Задание № 8.2

Условие:

Муми-мама испекла три одинаковые пиццы в виде правильного шестиугольника и сложила их рядом, как показано на рисунке.



Муми-тролль сделал два прямых разреза, как на рисунке, и взял себе кусочек, отмеченный красным.



Какую часть одной пиццы взял себе Муми-тролль?

Ответ: 5/12

Точное совпадение ответа — 1 балл

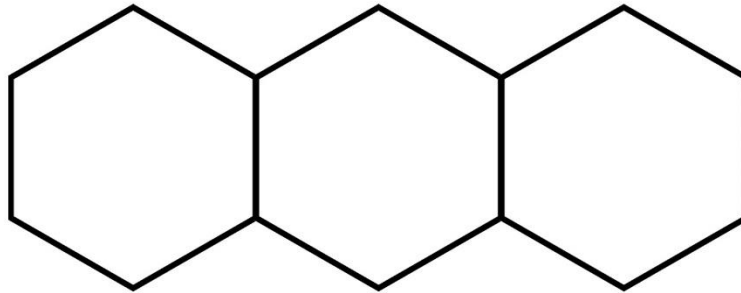
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

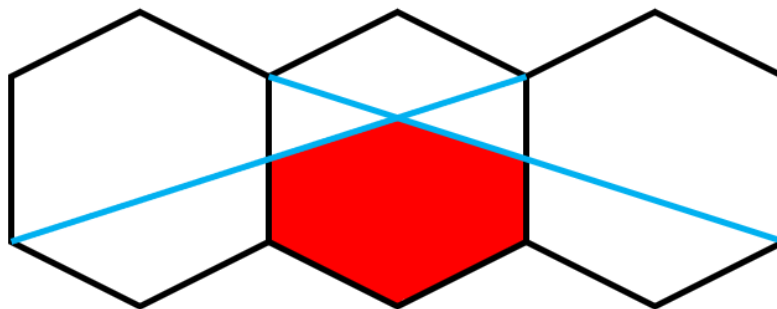
Задание № 8.3

Условие:

Муми-мама испекла три одинаковые пиццы в виде правильного шестиугольника и сложила их рядом, как показано на рисунке.



Муми-тролль сделал два прямых разреза, как на рисунке, и взял себе кусочек, отмеченный красным.



Какую часть одной пиццы взял себе Муми-тролль?

Ответ: 7/12

Точное совпадение ответа — 1 балл

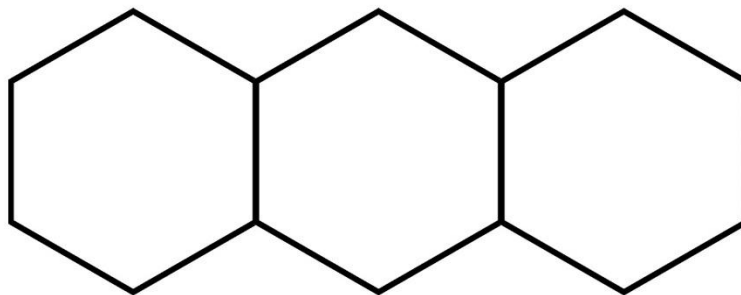
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

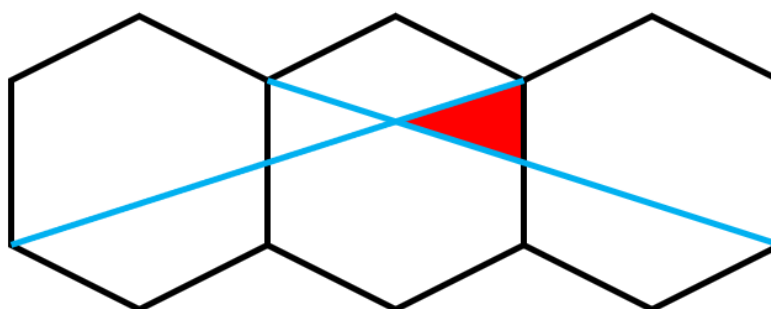
Задание № 8.4

Условие:

Муми-мама испекла три одинаковые пиццы в виде правильного шестиугольника и сложила их рядом, как показано на рисунке.



Муми-тролль сделал два прямых разреза, как на рисунке, и взял себе кусочек, отмеченный красным.



Какую часть одной пиццы взял себе Муми-тролль?

Ответ: $1/12$

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

**Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике
для 8 класса**

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

Попарно различные числа a , b и c таковы, что $ab + 2c = ac + 2b$. Найдите a .

Ответ: 2

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Перепишем равенство в виде $ab - ac = 2b - 2c$, $a(b - c) = 2(b - c)$. Сократив на $b - c$ (по условию все числа различны), получим $a = 2$.

Задание № 1.2

Условие:

Попарно различные числа x , y и z таковы, что $xy - 2z = xz - 2y$. Найдите x .

Ответ: -2

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

Попарно различные числа a , b и c таковы, что $bc + 3a = ac + 3b$. Найдите c .

Ответ: 3

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.4

Условие:

Попарно различные числа x , y и z таковы, что $yz + 5x = xy + 5z$. Найдите y .

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

Андрей сделал шарнирный подвижный четырёхугольник $ABCD$ с длинами сторон $AB = 105$ мм, $BC = 107$ мм, $CD = 109$ мм и $AD = 108$ мм. Какой из углов этого четырёхугольника может быть больше 180 градусов? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

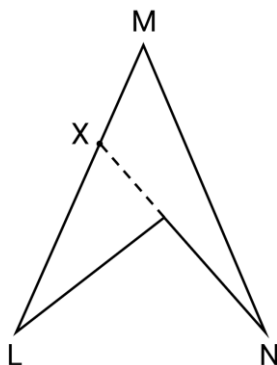
- ✓ ☒ А
- ✓ ☒ В
- ☐ С
- ☐ D
- ☐ Ни один из перечисленных

Точное совпадение ответа — 1 балл

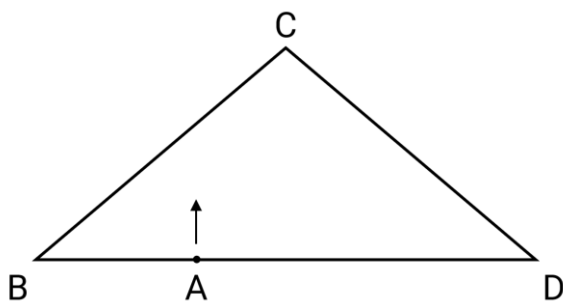
Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим следующий факт. Пусть $KLMN$ — невыпуклый четырёхугольник, причём угол K больше 180 градусов. Тогда $NK + KL < NM + ML$. Это можно доказать, например, так: продолжим NK до пересечения с ML (соответствующую точку пересечения обозначим за X). Тогда $NK + KL < NK + KX + XL = NX + XL < NM + MX + XL = NM + ML$ (мы дважды пользуемся неравенством треугольника).



Вернёмся к нашей задаче. Из условия следует, что $AD + AB < BC + CD$ и $AB + BC < CD + DA$ (остальные пары неравенств неверны), поэтому только A и B могут быть больше развёрнутых. Оба варианта реализуются: представим четырёхугольник как шарнирный механизм, тогда соответствующий угол (например, A) мы можем сделать развёрнутым — неравенство треугольника позволяет нам это сделать. Теперь мы можем чуть-чуть уменьшить диагональ BD с сохранением сторон, тогда вершина A «съедет» с диагонали BD . Осталось проследить, чтобы она съехала в нужную нам полуплоскость.



Задание № 2.2

Условие:

Лена сделала шарнирный подвижный четырёхугольник KLMN с длинами сторон $KL = 75$ мм, $LM = 76$ мм, $MN = 79$ мм и $KN = 77$ мм. Какой из углов этого четырёхугольника может быть больше 180 градусов? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ☒ К
- ☒ L
- ☐ M
- ☐ N
- ☐ Ни один из перечисленных

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

Костя сделал шарнирный подвижный четырёхугольник ABCD с длинами сторон $AB = 90$ мм, $BC = 95$ мм, $CD = 91$ мм и $AD = 92$ мм. Какой из углов этого четырёхугольника может быть больше 180 градусов? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ☒ A
- ☐ B
- ☐ C
- ☒ D
- ☐ Ни один из перечисленных

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.4

Условие:

Виталик сделал шарнирный подвижный четырёхугольник $XYZT$ с длинами сторон $XY = 86$ мм, $YZ = 81$ мм, $ZT = 82$ мм и $TX = 83$ мм. Какой из углов этого четырёхугольника может быть больше 180 градусов? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ☐ X
- ☐ Y
- ☒ Z
- ☒ T
- ☐ Ни один из перечисленных

Точное совпадение ответа — 1 балл

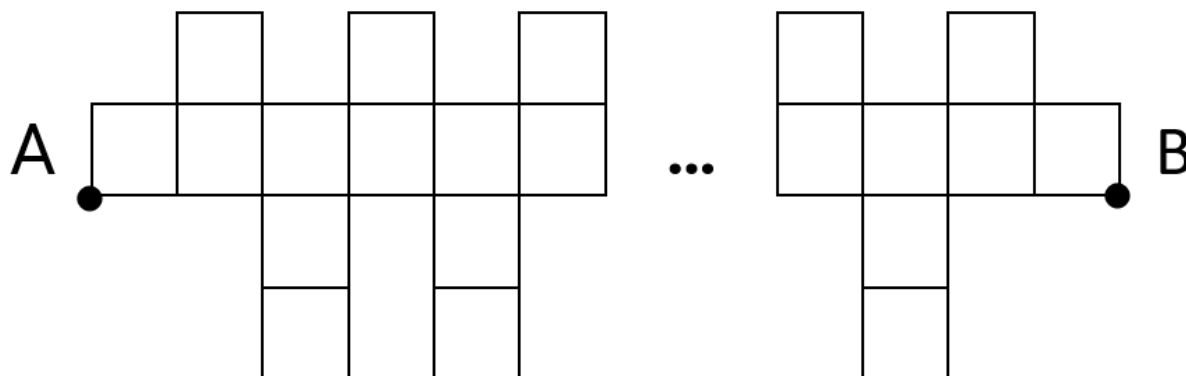
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

Условие:

На рисунке изображена фигура, состоящая из 304 единичных клеток.



Найдите длину отрезка АВ.

Ответ: 123

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

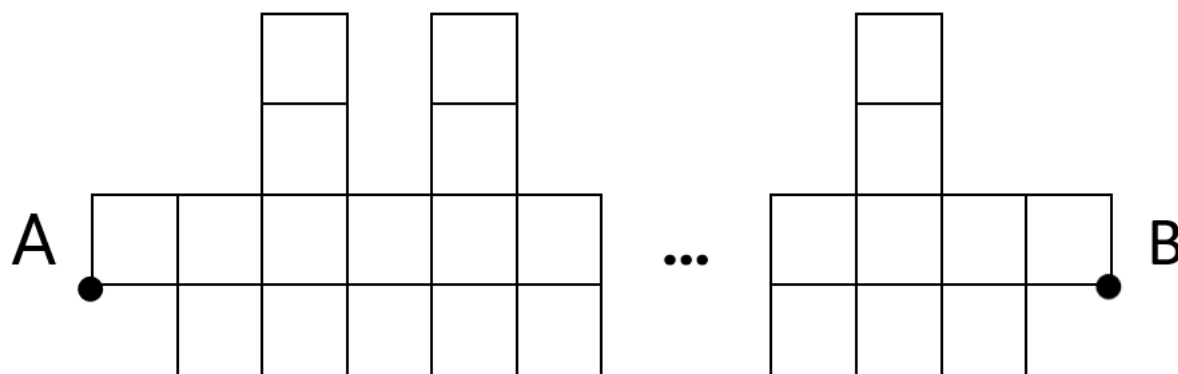
Решение.

Уберём четыре клетки: одну — граничащую с точкой А, и ещё три — ближайшие к В. Оставшаяся часть разобьётся на пятиклеточные «зигзаги». Таких зигзагов будет 60, и каждый добавляет по две клетки к расстоянию АВ — итого 120 клеток. Вспоминая про те клетки, которые мы убрали (они добавляют ещё три клетки к АВ), получаем ответ 123.

Задание № 3.2

Условие:

На рисунке изображена фигура, состоящая из 234 единичных клеток.



Найдите длину отрезка АВ.

Ответ: 95

Точное совпадение ответа — 1 балл

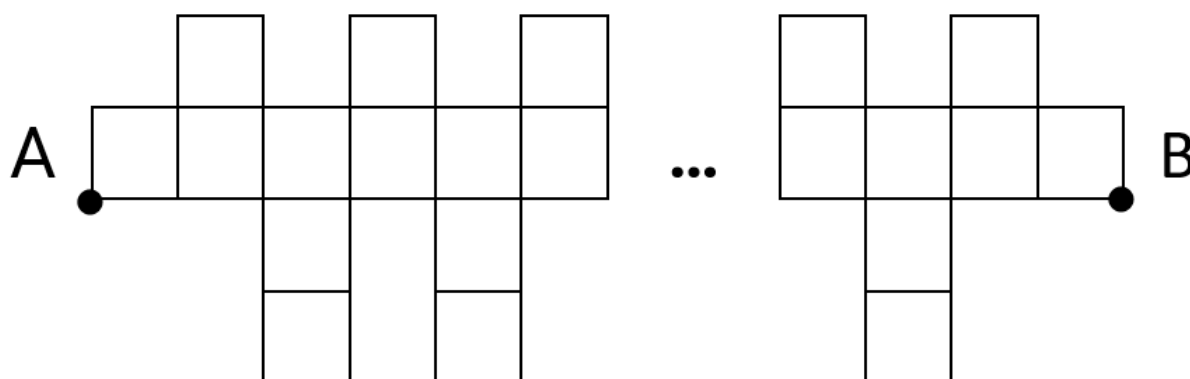
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

Условие:

На рисунке изображена фигура, состоящая из 369 единичных клеток.



Найдите длину отрезка АВ.

Ответ: 149

Точное совпадение ответа — 1 балл

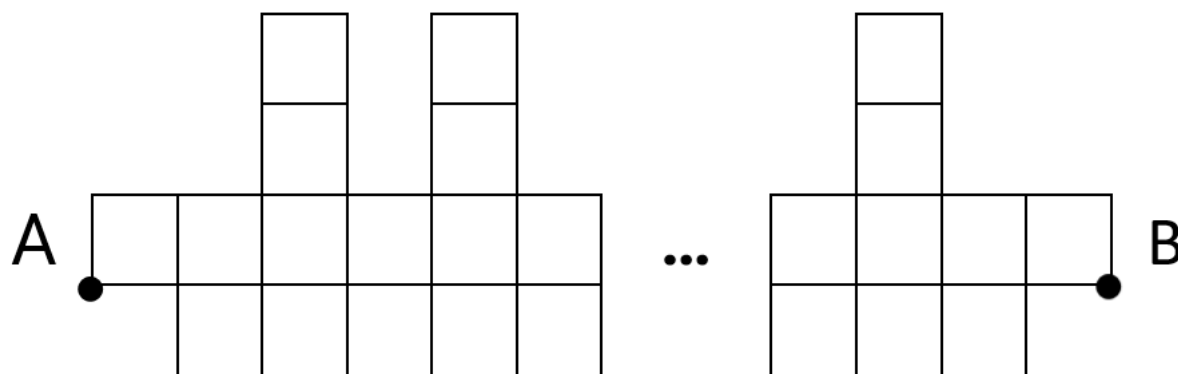
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.4

Условие:

На рисунке изображена фигура, состоящая из 654 единичных клеток.



Найдите длину отрезка АВ.

Ответ: 263

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Условие:

Число $328*16$ делится на каждую из своих цифр. Восстановите пропущенную цифру.

Ответ: 4

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Число должно делиться на 8, а значит, число, составленное из последних трёх цифр, тоже должно делиться на 8. Значит, пропущенная цифра чётная.

С другой стороны, сумма цифр должна делиться на 3 (одна из цифр — тройка), а тогда пропущенная цифра — 1, 4 или 7. Из них чётной является только 4.

Задание № 4.2

Условие:

Число $483*24$ делится на каждую из своих цифр. Восстановите пропущенную цифру.

Ответ: 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

Число $823*16$ делится на каждую из своих цифр. Восстановите пропущенную цифру.

Ответ: 4

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.4

Условие:

Число $348*24$ делится на каждую из своих цифр. Восстановите пропущенную цифру.

Ответ: 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

На сторонах BC и CD квадрата ABCD отмечены точки K и L соответственно. Оказалось, что $AK = 2KL$, $\angle AKL = 90^\circ$, $AL = 10$. Найдите сторону квадрата.

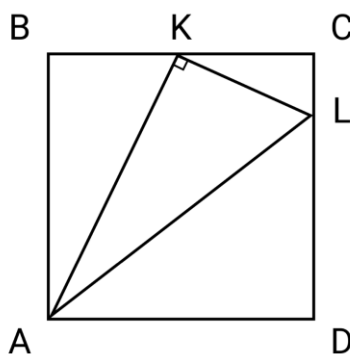
Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Так как $\angle AKL = 90^\circ$, то $\angle AKB + \angle CKL = 90^\circ$, то есть $\angle CKL = \angle BAK$, а тогда треугольник ABK подобен треугольнику KCL с коэффициентом 2.



Так как AB — сторона квадрата, то CK — половина стороны. Итак, K является серединой BC. Легко видеть также, что $CL \div LD = 1 \div 3$. Пусть a — сторона квадрата. По теореме Пифагора для треугольника ADL имеем

$$a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = 100$$

$$\frac{25a^2}{16} = 100$$

откуда $a = 8$.

Примечание. В этой задаче легко обойтись без подобия. Например, отметить точки X, Y и Z — середины AB, BK и AK, и доказать, что равны треугольники AXZ, XBY, YZX, ZYK и KCL.

Задание № 5.2

Условие:

На сторонах BC и CD квадрата ABCD отмечены точки X и Y соответственно.

Оказалось, что $AX = 2XY$, $\angle AXY = 90^\circ$, $AY = 20$. Найдите сторону квадрата.

Ответ: 16

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

На сторонах CD и AD квадрата $ABCD$ отмечены точки K и L соответственно.

Оказалось, что $BK = 2KL$, $\angle BKL = 90^\circ$, $BL = 10$. Найдите сторону квадрата.

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.4

Условие:

На сторонах BC и CD квадрата ABCD отмечены точки K и L соответственно. Оказалось, что $KL = 1/2AL$, $\angle ALK = 90^\circ$, $AK = 20$. Найдите сторону квадрата.

Ответ: 16

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 4

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Условие:

В двух кабинетах было по 30 учеников, причём в каждом из них по 15 мальчиков и 15 девочек. После того как десять учеников перебежали из второго кабинета в первый, оказалось, что 40 % учеников в первом кабинете — мальчики. А сколько процентов детей во втором кабинете являются мальчиками?

Ответ: 70

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

После того как десятеро перебежали из второго кабинета в первый, в первом кабинете оказалось 40 учеников. Так как 40 % из них — мальчики, то мальчиков 16. Значит, из второго кабинета перебежал один мальчик и девять девочек, а осталось там 14 мальчиков и 6 девочек (всего 20 детей). Отсюда процент мальчиков во втором кабинете — 70.

Задание № 6.2

Условие:

В двух кабинетах было по 20 учеников, причём в каждом из них по 10 мальчиков и 10 девочек. После того как пять учеников перебежали из второго кабинета в первый, оказалось, что 44 % учеников в первом кабинете — мальчики. А сколько процентов детей во втором кабинете являются мальчиками?

Ответ: 60

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.3

Условие:

В двух кабинетах было по 40 учеников, причём в каждом из них по 20 мальчиков и 20 девочек. После того как 15 учеников перебежали из второго кабинета в первый, оказалось, что 40 % учеников в первом кабинете — мальчики. А сколько процентов детей во втором кабинете являются мальчиками?

Ответ: 72

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.4

Условие:

В двух кабинетах было по 30 учеников, причём в каждом из них по 15 мальчиков и 15 девочек. После того как десять учеников перебежали из второго кабинета в первый, оказалось, что 45 % учеников в первом кабинете — мальчики. А сколько процентов детей во втором кабинете являются мальчиками?

Ответ: 60

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

Сто рыцарей, сто лжецов и сто болванов сидят за круглым столом в каком-то порядке. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а болваны всегда повторяют последнюю услышанную фразу. Каждый сказал одну из фраз: «Мой сосед справа — рыцарь», «Мой сосед справа — лжец» или «Мой сосед справа — болван», причём каждую следующую фразу говорил сидящий справа от того, кто сказал предыдущую фразу. Какое наибольшее количество фраз «Мой сосед справа — рыцарь» могло быть произнесено?

Ответ: 299

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Рассмотрим какого-нибудь рыцаря, у которого правый сосед — не рыцарь (для этого можно рассмотреть группу подряд идущих рыцарей и взять самого правого из них); он не сможет сказать: «Мой правый сосед — рыцарь». Значит, максимальное количество таких фраз — 299. Пример строится, если подряд стоят сперва сто рыцарей, затем сто лжецов, за ними сто болванов. Пусть первую фразу скажет первый из рыцарей. Тогда каждый лжец, а значит и каждый болван, будет говорить «Мой сосед справа — рыцарь».

Задание № 7.2

Условие:

Двести рыцарей, сто лжецов и пятьдесят болванов сидят за круглым столом в каком-то порядке. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а болваны всегда повторяют последнюю услышанную фразу. Каждый сказал одну из фраз: «Мой сосед справа — рыцарь», «Мой сосед справа — лжец» или «Мой сосед справа — болван», причём каждую следующую фразу говорил сидящий справа от того, кто сказал предыдущую фразу. Какое наибольшее количество фраз «Мой сосед справа — рыцарь» могло быть произнесено?

Ответ: 349

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

Сорок рыцарей, пятьдесят лжецов и шестьдесят болванов сидят за круглым столом в каком-то порядке. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а болваны всегда повторяют последнюю услышанную фразу. Каждый сказал одну из фраз: «Мой сосед справа — рыцарь», «Мой сосед справа — лжец» или «Мой сосед справа — болван», причём каждую следующую фразу говорил сидящий справа от того, кто сказал предыдущую фразу. Какое наибольшее количество фраз «Мой сосед справа — рыцарь» могло быть произнесено?

Ответ: 149

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.4

Условие:

Сто рыцарей, пятьдесят лжецов и пятьдесят болванов сидят за круглым столом в каком-то порядке. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а болваны всегда повторяют последнюю услышанную фразу. Каждый сказал одну из фраз: «Мой сосед справа — рыцарь», «Мой сосед справа — лжец» или «Мой сосед справа — болван», причём каждую следующую фразу говорил сидящий справа от того, кто сказал предыдущую фразу. Какое наибольшее количество фраз «Мой сосед справа — рыцарь» могло быть произнесено?

Ответ: 199

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

Даны $a, b > 0$. Точки пересечения прямых $y = ax + a$, $y = ax + b$, $y = bx + a$, $y = bx + b$, и образуют четырёхугольник. Точка пересечения диагоналей этого четырёхугольника имеет ординату, равную 20. Найдите максимальную из ординат вершин этого четырёхугольника.

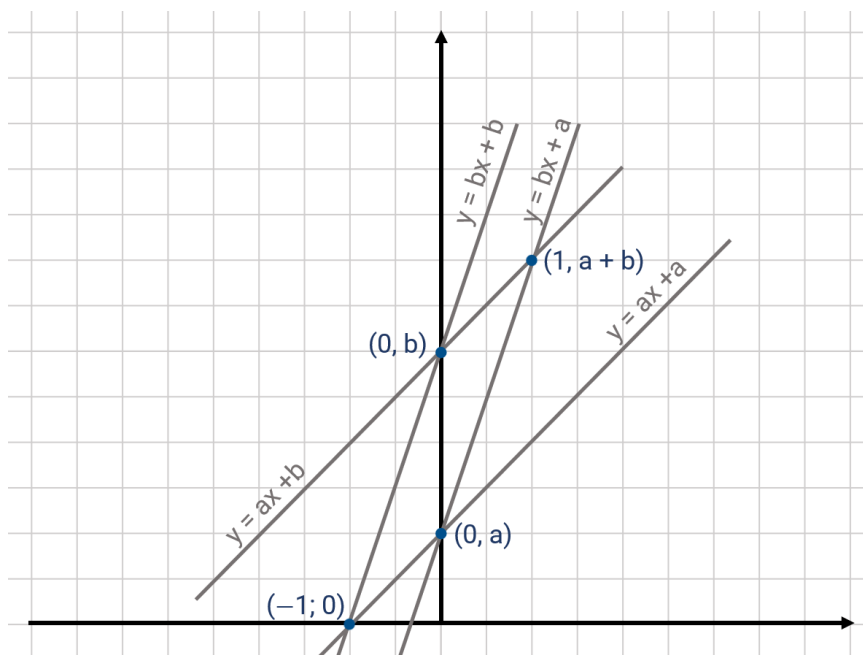
Ответ: 40

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Прямые $y = ax + a$ и $y = ax + b$ параллельны; также параллельны прямые $y = bx + a$ и $y = bx + b$.



Значит, полученный четырёхугольник — параллелограмм. А у параллелограмма диагонали точкой пересечения делятся пополам. Кроме того, мы легко можем вычислить координаты вершин параллелограмма: $(-1, 0)$ (пересечение $y = ax + a$ и $y = bx + b$), $(0, a)$, $(0, b)$ и $(1, a + b)$. Наименьшая ордината — 0,

наибольшая — $a + b$, а их среднее арифметическое — ордината точки пересечения диагоналей, т.е. 20. Поэтому $a + b = 40$, и это ответ к задаче.

Задание № 8.2

Условие:

Даны $a, b > 0$. Точки пересечения прямых $y = ax + a$, $y = ax + b$, $y = bx + a$, $y = bx + b$, и образуют четырёхугольник. Точка пересечения диагоналей этого четырёхугольника имеет ординату, равную 30. Найдите максимальную из ординат вершин этого четырёхугольника.

Ответ: 60

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

Даны $a, b > 0$. Точки пересечения прямых $y = ax + a$, $y = ax + b$, $y = bx + a$, $y = bx + b$, и образуют четырёхугольник. Максимальная из ординат вершин этого четырёхугольника равна 20. Найдите ординату точки пересечения диагоналей этого четырёхугольника.

Ответ: 10

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.4

Условие:

Даны $a, b > 0$. Точки пересечения прямых $y = ax + a$, $y = ax + b$, $y = bx + a$, $y = bx + b$, и образуют четырёхугольник. Максимальная из ординат вершин этого четырёхугольника равна 50. Найдите ординату точки пересечения диагоналей этого четырёхугольника.

Ответ: 25

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

для 9 класса

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

На координатной плоскости OXY отметили все точки (x, y) , координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + 2xy = 0$. Что за множество получилось?

Ответ:

- ☐ Прямая
- ☐ Одна точка
- ☐ Окружность
- ☒ Две пересекающиеся прямые
- ☐ Две параллельные прямые
- ☐ Парабола
- ☐ Пустое множество

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Произведение равно 0, когда хотя бы один из сомножителей равен 0. Множество представляет из себя объединение прямой $x = 0$ и прямой $x + 2y = 0$.

Задание № 1.2

Условие:

На координатной плоскости OXY отметили все точки (x, y) , координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + 4xy + 4y^2 = 0$. Что за множество получилось?

Ответ:

- ✓ Прямая
- Одна точка
- Окружность
- Две пересекающиеся прямые
- Две параллельные прямые
- Парабола
- Пустое множество

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

На координатной плоскости OXY отметили все точки (x, y) , координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + 5x + y^2 = 0$. Что за множество получилось?

Ответ:

- ☐ Прямая
- ☐ Одна точка
- ☒ Окружность
- ☐ Две пересекающиеся прямые
- ☐ Две параллельные прямые
- ☐ Парабола
- ☐ Пустое множество

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.4

Условие:

На координатной плоскости OXY отметили все точки (x, y) , координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + 3y^2 = 2x - 1$. Что за множество получилось?

Ответ:

- ☐ Прямая
- ☒ Одна точка
- ☐ Окружность
- ☐ Две пересекающиеся прямые
- ☐ Две параллельные прямые
- ☐ Парабола
- ☐ Пустое множество

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

В треугольник со сторонами 5, 6 и 8 вписана окружность. Петя посчитал расстояния от каждой из вершин треугольника до ближайшей точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника. Чему равно наименьшее из этих расстояний?

Ответ: 1.5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Расстояние от вершины треугольника до точки касания вписанной окружности с выходящими из неё сторонами равны. Пусть стороны треугольника a , b и c , расстояния от вершин до точек касания с окружностью равны x , y , и z . Тогда $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$, тогда через стороны треугольника эти расстояния находятся по формуле $x = (b + c - a) \div 2$, $y = (a + c - b) \div 2$, $z = (a + b - c) \div 2$. Наименьшее расстояние получается, когда вычитается наибольшая из сторон, в нашем случае это $(5 + 6 - 8) \div 2 = 1.5$.

Задание № 2.2

Условие:

В треугольник со сторонами 4, 5 и 8 вписана окружность. Петя посчитал расстояния от каждой из вершин треугольника до ближайшей точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника. Чему равно наименьшее из этих расстояний?

Ответ: 0.5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

В треугольник со сторонами 6, 7 и 8 вписана окружность. Петя посчитал расстояния от каждой из вершин треугольника до ближайшей точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника. Чему равно наименьшее из этих расстояний?

Ответ: 2.5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.4

Условие:

В треугольник со сторонами 4, 5 и 6 вписана окружность. Петя посчитал расстояния от каждой из вершин треугольника до ближайшей точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника. Чему равно наименьшее из этих расстояний?

Ответ: 1.5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

Условие:

У Пети есть по одной карточке с цифрами 9, 8, 7, 4, 3. Он составил из них пятизначное число. Вася составил из них другое пятизначное число, вычел из большего меньшее и записал результат на доске. Получилось четырёхзначное число, состоящее из различных цифр, отличных от изначальных. Какая цифра осталась не задействована? Числа не могут начинаться с 0.

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Изначальные два числа имеют одинаковую сумму цифр, а значит, их разность делится на 9. Остались цифры 0, 1, 2, 5, 6. Чтобы сумма делилась на 9, надо убрать 5. Осталось убедиться, что набор цифр 0, 1, 2, 6 достижим. Действительно, $94873 - 93847 = 1026$.

Задание № 3.2

Условие:

У Пети есть по одной карточке с цифрами 7, 6, 3, 2, 0. Он составил из них пятизначное число. Вася составил из них другое пятизначное число, вычел из большего меньшее и записал результат на доске. Получилось четырёхзначное число, состоящее из различных цифр, отличных от изначальных. Какая цифра осталась не задействована? Числа не могут начинаться с 0.

Ответ: 9

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

Условие:

У Пети есть по одной карточке с цифрами 8, 7, 4, 2, 1. Он составил из них пятизначное число. Вася составил из них другое пятизначное число, вычел из большего меньшее и записал результат на доске. Получилось четырёхзначное число, состоящее из различных цифр, отличных от изначальных. Какая цифра осталась не задействована? Числа не могут начинаться с 0.

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.4

Условие:

У Пети есть по одной карточке с цифрами 9, 7, 4, 0, 1. Он составил из них пятизначное число. Вася составил из них другое пятизначное число, вычел из большего меньшее и записал результат на доске. Получилось четырёхзначное число, состоящее из различных цифр, отличных от изначальных. Какая цифра осталась не задействована? Числа не могут начинаться с 0.

Ответ: 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Условие:

Родители с сыном отправились по тропе к озеру. Сын сразу пошёл вперед, а дойдя до озера, повернул назад и шёл, пока не встретил идущих медленнее родителей. Длина его пути до озера оказалась равна 800 шагам, а назад до родителей — 600 шагам. Общее потраченное сыном время до встречи с родителями — 20 минут. Через сколько минут после встречи с возвращающимся сыном родители дойдут до озера? Считаем, что шаги имеют равную длину, скорости сына и родителей постоянны.

Ответ: 60

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Соотношение расстояний от начала пути до озера и от точки встречи до озера такое же, как у числа шагов: $\frac{600}{800}$, то есть точка встречи находится на расстоянии четверти пути от начала. То есть родители прошли четверть пути до озера за 20 минут. Значит, весь путь займёт у них 80 минут, а после встречи с сыном — один час.

Задание № 4.2

Условие:

Родители с сыном отправились по тропе к озеру. Сын сразу пошёл вперед, а дойдя до озера, повернул назад и шёл, пока не встретил идущих медленнее родителей. Длина его пути до озера оказалась равна 400 шагам, а назад до родителей — 300 шагам. Общее потраченное сыном время до встречи с родителями — 15 минут. Через сколько минут после встречи с возвращающимся сыном родители дойдут до озера? Считаем, что шаги имеют равную длину, скорости сына и родителей постоянны.

Ответ: 45

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

Родители с сыном отправились по тропе к озеру. Сын сразу пошёл вперед, а дойдя до озера, повернул назад и шёл, пока не встретил идущих медленнее родителей. Длина его пути до озера оказалась равна 300 шагам, а назад до родителей — 250 шагам. Общее потраченное сыном время до встречи с родителями — 10 минут. Через сколько минут после встречи с возвращающимся сыном родители дойдут до озера? Считаем, что шаги имеют равную длину, скорости сына и родителей постоянны.

Ответ: 50

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.4

Условие:

Родители с сыном отправились по тропе к озеру. Сын сразу пошёл вперед, а дойдя до озера, повернул назад и шёл, пока не встретил идущих медленнее родителей. Длина его пути до озера оказалась равна 500 шагам, а назад до родителей — 400 шагам. Общее потраченное сыном время до встречи с родителями — 15 минут. Через сколько минут после встречи с возвращающимся сыном родители дойдут до озера? Считаем, что шаги имеют равную длину, скорости сына и родителей постоянны.

Ответ: 60

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

Натуральные корни x_1 и x_2 многочлена $x^2 - bx + c$ таковы, что произведение bcx_1x_2 равно 22932. Найдите наибольшее возможное значение c .

Ответ: 42

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

По теореме Виета $bc^2 = 22932$. То есть c^2 — делитель 22932. Как нетрудно убедиться, $22932 = 42^2 \cdot 13$, откуда c не больше 42. Многочлен $(x - 6)(x - 7)$ удовлетворяет условиям.

Задание № 5.2

Условие:

Натуральные корни x_1 и x_2 многочлена $x^2 - bx + c$ таковы, что произведение bsx_1x_2 равно 20800. Найдите наибольшее возможное значение c .

Ответ: 40

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

Натуральные корни x_1 и x_2 многочлена $x^2 - bx + c$ таковы, что произведение bsx_1x_2 равно 16848. Найдите наибольшее возможное значение c .

Ответ: 36

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.4

Условие:

Натуральные корни x_1 и x_2 многочлена $x^2 - bx + c$ таковы, что произведение bcx_1x_2 равно 11700. Найдите наибольшее возможное значение c .

Ответ: 30

Точное совпадение ответа — 1 балл

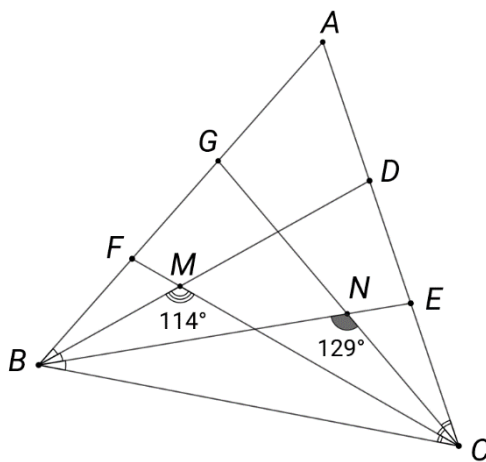
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Условие:

В треугольнике ABC отрезки BD и BE делят угол $\angle ABC$ на три равные части. Отрезки CF и CG делят угол $\angle ACB$ на три равные части. Отрезки BD и CF пересекаются в точке M , а отрезки BE и CG пересекаются в точке N . Известно, что $\angle BMC = 114^\circ$, $\angle BNC = 129^\circ$. Найдите углы треугольника ABC . Ответ выразите в градусах.



Ответ: $\angle ABC = 81^\circ$, $\angle ACB = 36^\circ$, $\angle BAC = 63^\circ$.

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пусть bet — это треть угла $\angle ABC$, gam — это треть угла $\angle ACB$. Рассматривая углы треугольника BMC находим, что $2\text{bet} + \text{gam} + 114^\circ = 180^\circ$.

Рассматривая углы треугольника BNC находим, что $\text{bet} + 2\text{gam} + 129^\circ = 180^\circ$.

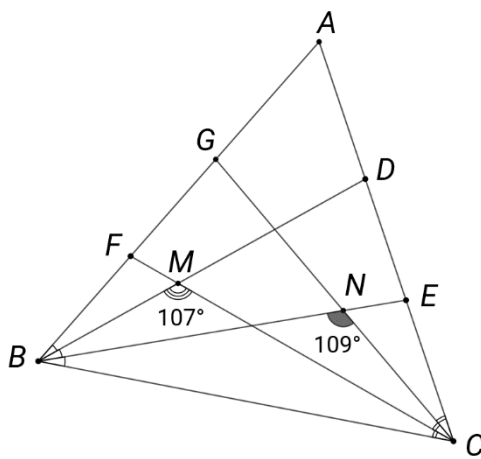
Складывая эти два равенства, находим, что $3\text{bet} + 3\text{gam} = 66^\circ + 51^\circ = 117^\circ$, или $\text{bet} + \text{gam} = 39^\circ$. Вычитая из первого второе, находим, что $\text{bet} - \text{gam} = 15^\circ$, откуда $\text{bet} = 27^\circ$, $\text{gam} = 12^\circ$.

Откуда имеем углы треугольника $\angle ABC = 81^\circ$, $\angle ACB = 36^\circ$, $\angle BAC = 180^\circ - 81^\circ - 36^\circ = 63^\circ$.

Задание № 6.2

Условие:

В треугольнике ABC отрезки BD и BE делят угол $\angle ABC$ на три равные части. Отрезки CF и CG делят угол $\angle ACB$ на три равные части. Отрезки BD и CF пересекаются в точке M , а отрезки BE и CG пересекаются в точке N . Известно, что $\angle BMC = 107^\circ$, $\angle BNC = 109^\circ$. Найдите углы треугольника ABC . Ответ выразите в градусах.



Ответ: $\angle ABC = 75^\circ$, $\angle ACB = 69^\circ$, $\angle BAC = 36^\circ$.

Точное совпадение ответа — 1 балл

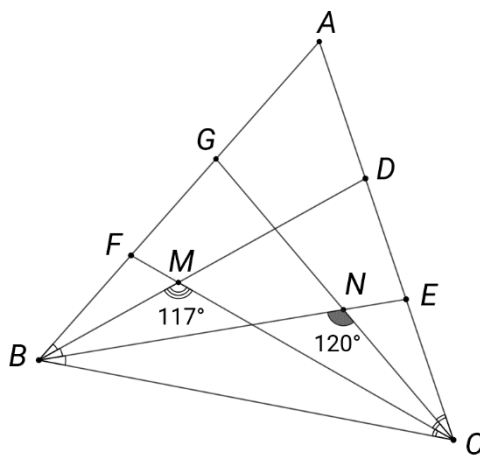
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.3

Условие:

В треугольнике ABC отрезки BD и BE делят угол $\angle ABC$ на три равные части. Отрезки CF и CG делят угол $\angle ACB$ на три равные части. Отрезки BD и CF пересекаются в точке M , а отрезки BE и CG пересекаются в точке N . Известно, что $\angle BMC = 117^\circ$, $\angle BNC = 120^\circ$. Найдите углы треугольника ABC . Ответ выразите в градусах.



Ответ: $\angle ABC = 66^\circ$, $\angle ACB = 57^\circ$, $\angle BAC = 57^\circ$.

Точное совпадение ответа — 1 балл

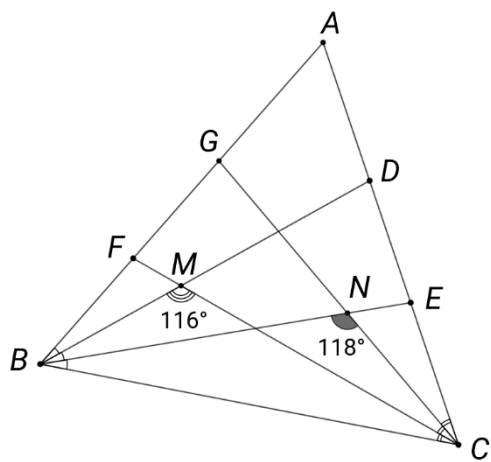
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.4

Условие:

В треугольнике ABC отрезки BD и BE делят угол $\angle ABC$ на три равные части. Отрезки CF и CG делят угол $\angle ACB$ на три равные части. Отрезки BD и CF пересекаются в точке M , а отрезки BE и CG пересекаются в точке N . Известно, что $\angle BMC = 116^\circ$, $\angle BNC = 118^\circ$. Найдите углы треугольника ABC . Ответ выразите в градусах.



Ответ: $\angle ABC = 66^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$, $\angle BAC = 54^\circ$.

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

В кругу сидели 12 болельщиков команд «Шайба» и «Зубило». Каждый болел ровно за одну из этих двух команд. Каждый болельщик сказал своему соседу слева одну из двух фраз: или «ты болеешь за ту же команду, что и мой сосед справа», или «вы с моим соседом справа болеете за разные команды». Оказалось, что ровно половина болельщиков сказала первую фразу и ровно половина — вторую. При этом каждый говорил правду, если обращался к своему единомышленнику (болеющему за ту же команду), и лгал, если обращался к фанату другой команды. Какое максимальное количество болельщиков «Шайбы» могло быть?

Ответ: 9

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Фраза «ты болеешь за ту же команду, что и мой сосед справа» звучит тогда и только тогда, когда говорящий — единомышленник своего соседа справа. Действительно, если сосед слева единомышленник, то произнесённое — истина, и все трое болеют за одну команду. Если же сосед слева — фанат другой команды, то звучит ложь, и сосед справа различен во вкусах с соседом слева, то есть совпадает с говорящим. Аналогично, фраза «вы с правым соседям болеете за разные команды» означает, что говорящий и его сосед справа болеют за разные команды. То есть задача сводится к тому, что половина сидящих болеет за ту же команду, что их правый сосед, а половина — за другую.

Из пары [сказавший вторую фразу, его сосед справа] хотя бы один болеет за Зубило. При этом один болельщик может входить в такую пару не более, чем дважды (когда говорит он сам, и когда говорит его сосед слева). Поэтому

число болельщиков Зубила — не меньше половины сказавших вторую фразу, то есть не меньше четверти от общего количества болельщиков.

Эта оценка строгая. Если 6 болельщиков Шайбы сидят рядом, а на шести оставшихся местах болельщики Шайбы и Зубила чередуются, то условия выполнены и имеем 9 болельщиков Шайбы:

ШШ...Ш ЗШ...ЗШ.

Задание № 7.2

Условие:

В кругу сидели 20 болельщиков команд «Шайба» и «Зубило». Каждый болел ровно за одну из этих двух команд. Каждый болельщик сказал своему соседу слева одну из двух фраз: или «ты болеешь за ту же команду, что и мой сосед справа», или «вы с моим соседом справа болеете за разные команды». Оказалось, что ровно половина болельщиков сказала первую фразу и ровно половина — вторую. При этом каждый говорил правду, если обращался к своему единомышленнику (болеющему за ту же команду), и лгал, если обращался к фанату другой команды. Какое максимальное количество болельщиков «Шайбы» могло быть?

Ответ: 15

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

В кругу сидели 24 болельщика команд «Шайба» и «Зубило». Каждый болел ровно за одну из этих двух команд. Каждый болельщик сказал своему соседу слева одну из двух фраз: или «ты болеешь за ту же команду, что и мой сосед справа», или «вы с моим соседом справа болеете за разные команды». Оказалось, что ровно половина болельщиков сказала первую фразу и ровно половина — вторую. При этом каждый говорил правду, если обращался к своему единомышленнику (болеющему за ту же команду), и лгал, если обращался к фанату другой команды. Какое максимальное количество болельщиков «Шайбы» могло быть?

Ответ: 18

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.4

Условие:

В кругу сидели 16 болельщиков команд «Шайба» и «Зубило». Каждый болел ровно за одну из этих двух команд. Каждый болельщик сказал своему соседу слева одну из двух фраз: или «ты болеешь за ту же команду, что и мой сосед справа», или «вы с моим соседом справа болеете за разные команды». Оказалось, что ровно половина болельщиков сказала первую фразу и ровно половина — вторую. При этом каждый говорил правду, если обращался к своему единомышленнику (болеющему за ту же команду), и лгал, если обращался к фанату другой команды. Какое максимальное количество болельщиков «Шайбы» могло быть?

Ответ: 12

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

В океане кораллы часто сливаются в единый организм для лучшего выживания. При слиянии двух кораллов с M и N щупальцами вместо них образуется один коралл с $(M + N - 1)$ щупальцами. Вначале имеется 100 кораллов с тремя щупальцами, 101 коралл с четырьмя щупальцами и 102 коралла с пятью щупальцами. После нескольких слияний остался один коралл. Какое наибольшее количество щупалец у него может быть?

Ответ: 912

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

При любом слиянии и число кораллов, и общее число щупалец уменьшается на 1. То есть сохраняется разность между общим количеством щупалец и количеством кораллов. Вначале было 303 коралла с $100 \cdot 3 + 101 \cdot 4 + 102 \cdot 5 = 1214$ щупальцами. Разность равна $1214 - 303 = 911$. Когда останется один коралл, число щупалец у него будет равно 912, не зависимо от порядка объединения.

Задание № 8.2

Условие:

В океане кораллы часто сливаются в единый организм для лучшего выживания. При слиянии двух кораллов с M и N щупальцами вместо них образуется один коралл с $(M + N - 1)$ щупальцами. Вначале имеется 50 кораллов с тремя щупальцами, 51 коралл с четырьмя щупальцами и 52 коралла с пятью щупальцами. После нескольких слияний остался один коралл. Какое наибольшее количество щупалец у него может быть?

Ответ: 462

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

В океане кораллы часто сливаются в единый организм для лучшего выживания. При слиянии двух кораллов с M и N щупальцами вместо них образуется один коралл с $(M + N - 1)$ щупальцами. Вначале имеется 200 кораллов с тремя щупальцами, 201 коралл с четырьмя щупальцами и 202 коралла с пятью щупальцами. После нескольких слияний остался один коралл. Какое наибольшее количество щупалец у него может быть?

Ответ: 1812

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.4

Условие:

В океане кораллы часто сливаются в единый организм для лучшего выживания. При слиянии двух кораллов с M и N полипами вместо них образуется один коралл с $(M + N - 1)$ щупальцами. Вначале имеется 500 кораллов с тремя щупальцами, 501 коралл с четырьмя щупальцами и 502 коралла с пятью щупальцами. После нескольких слияний остался один коралл. Какое наибольшее количество щупалец у него может быть?

Ответ: 4512

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

**Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике
для 10 класса**

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

Запишите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в десятичной записи которого присутствуют только цифры 1 и 0.

Ответ: 1111111100

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

$36 = 2^2 \cdot 3^2$, значит число должно делиться на 9 и на 4. По признаку делимости на 9, сумма цифр числа должна быть кратна 9. Тогда, учитывая, что 0 не является натуральным числом, искомое число должно состоять хотя бы из 9 единиц. Чтобы число делилось на 4 в конце числа должно быть хотя бы два нуля (11, 10, 01 не делится на 4). Итого, наименьшее число, состоящее хотя бы из девяти единиц и двух нулей на конце, это 1111111100.

Задание № 1.2

Условие:

Запишите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в десятичной записи которого присутствуют только цифры 2 и 0.

Ответ: 2222222220

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

Запишите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в десятичной записи которого присутствуют только цифры 7 и 0.

Ответ: 77777777700

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.4

Условие:

Запишите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в десятичной записи которого присутствуют только цифры 5 и 0.

Ответ: 55555555500

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

Имеется бумажный прямоугольник. Если его разрезать девятью параллельными разрезами на 10 одинаковых маленьких прямоугольников, то периметр каждого маленького прямоугольника будет в 4 раза меньше, чем периметр исходного прямоугольника. Найдите отношение большей стороны к меньшей стороне исходного прямоугольника.

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пусть A и B — длины сторон исходного прямоугольника. Тогда, не умаляя общности, пусть делили вдоль стороны B . Значит стороны маленьких прямоугольников $A \div 10$ и B . Тогда можно составить уравнение, где периметр исходного прямоугольника равен увеличенному в 4 раза периметру маленького прямоугольника: $2(A + B) = 4 \cdot 2 \cdot (A \div 10 + B) \Rightarrow 2A + 2B = 8A \div 10 + 8B \Rightarrow 6B = 12A \div 10 \Rightarrow A = 5B$. Значит $A \div B = 5$.

Задание № 2.2

Условие:

Имеется бумажный прямоугольник. Если его разрезать двенадцатью параллельными разрезами на 13 одинаковых маленьких прямоугольников, то периметр каждого маленького прямоугольника будет в 5 раз меньше, чем периметр исходного прямоугольника. Найдите отношение большей стороны к меньшей стороне исходного прямоугольника.

Ответ: 6.5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

Имеется бумажный прямоугольник. Если его разрезать восемью параллельными разрезами на 9 одинаковых маленьких прямоугольников, то периметр каждого маленького прямоугольника будет в 3 раза меньше, чем периметр исходного прямоугольника. Найдите отношение большей стороны к меньшей стороне исходного прямоугольника.

Ответ: 3

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.4

Условие:

Имеется бумажный прямоугольник. Если его разрезать десятью параллельными разрезами на 11 одинаковых маленьких прямоугольников, то периметр каждого маленького прямоугольника будет в 3 раза меньше, чем периметр исходного прямоугольника. Найдите отношение большей стороны к меньшей стороне исходного прямоугольника.

Ответ: 2.75

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

Условие:

На одном чертеже изображены графики четырёх функций вида

$$y = x^2 + bx + c.$$

Сколько точек пересечения этих графиков может быть? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ☒ 3
- ☒ 4
- ☒ 5
- ☒ 6
- ☐ 7
- ☐ 8
- ☐ 9
- ☐ 10

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Все графики такого вида — это параболы, получающиеся из параболы $y = x^2$ путем разнообразных параллельных переносов. Соответственно любые две такие параболы либо не пересекаются (если сдвиг от одной к другой происходит вдоль оси OY), либо пересекаются ровно в одной точке (например, потому что уравнение $x^2 + bx + c = x^2 + dx + k$ имеет максимум одно решение).

Для каждого из вариантов от 0 до 6 можно привести пример.

Задание № 3.2

Условие:

На одном чертеже изображены графики четырёх функций вида

$$y = x^2 + bx + c.$$

Сколько точек пересечения этих графиков может быть? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ☐ 0
- ☒ 3
- ☒ 4
- ☒ 5
- ☒ 6
- ☐ 7
- ☐ 8
- ☐ 9
- ☐ 10

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

Условие:

На одном чертеже изображены графики четырёх функций вида

$$y = x^2 + 2bx + 2c.$$

Сколько точек пересечения этих графиков может быть? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ☒ 3
- ☒ 4
- ☒ 5
- ☒ 6
- ☐ 7
- ☐ 8
- ☐ 9
- ☐ 10

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.4

Условие:

На одном чертеже изображены графики четырёх функций вида

$$y = x^2 + 2bx + 2c.$$

Сколько точек пересечения этих графиков может быть? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ☒ 0
- ☒ 3
- ☒ 4
- ☒ 5
- ☒ 6
- ☐ 7
- ☐ 8
- ☐ 9
- ☐ 10

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Условие:

Сколько существует таких троек натуральных чисел (A, B, N) , что $A + B = 62$, а B больше A ровно на N процентов?

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Если $A + B = 62$, то B больше A ровно на $\frac{62 - A - A}{A} \cdot 100$ процентов. Чтобы это число получилось натуральным, необходимо и достаточно, чтобы A было строго меньше половины суммы, и являлось делителем числа $62 \cdot 100$. Подходит $A = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25$.

Задание № 4.2

Условие:

Сколько существует таких троек натуральных чисел (A, B, N) , что $A + B = 46$, а B больше A ровно на N процентов?

Ответ: 7

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

Сколько существует таких троек натуральных чисел (A, B, N) , что $A + B = 38$, а B больше A ровно на N процентов?

Ответ: 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.4

Условие:

Сколько существует таких троек натуральных чисел (A, B, N) , что $A + B = 82$, а B больше A ровно на N процентов?

Ответ: 9

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

За круглым столом собрались 20 человек, каждый из них либо лжец, который всегда врёт, либо рыцарь, который всегда говорит правду. Каждый из сидящих за столом сделал заявление:

«Среди четырёх ближайших ко мне в круге людей (2 соседа справа и 2 соседа слева) есть хотя бы один лжец!»

Сколько лжецов могло быть в круге? Укажите все возможные варианты, записывая каждый в отдельное поле.

Ответ:

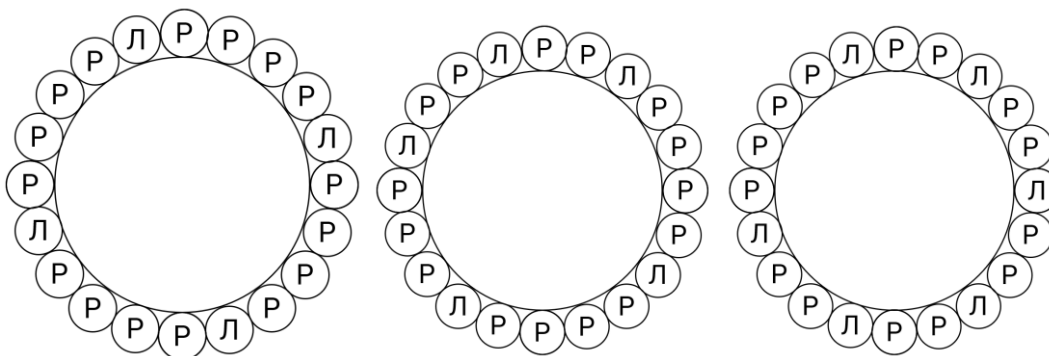
- ✓ 4
- ✓ 5
- ✓ 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Среди любых 5 подряд идущих людей есть хотя бы 1 лжец, поэтому лжецов не может быть меньше $1/5$ от всего количества людей. С другой стороны, среди любых 3 подряд идущих людей хотя бы двое должны быть рыцарями. Поэтому лжецов не более $1/3$ от всего количества людей.



Задание № 5.2

Условие:

За круглым столом собрались 17 человек, каждый из них либо лжец, который всегда врёт, либо рыцарь, который всегда говорит правду. Каждый из сидящих за столом сделал заявление:

«Среди четырёх ближайших ко мне в круге людей (2 соседа справа и 2 соседа слева) есть хотя бы один лжец!»

Сколько лжецов могло быть в круге? Укажите все возможные варианты, записывая каждый в отдельное поле.

Ответ:

✓ 4

✓ 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

За круглым столом собрались 15 человек, каждый из них либо лжец, который всегда врёт, либо рыцарь, который всегда говорит правду. Каждый из сидящих за столом сделал заявление:

«Среди четырёх ближайших ко мне в круге людей (2 соседа справа и 2 соседа слева) есть хотя бы один лжец!»

Сколько лжецов могло быть в круге? Укажите все возможные варианты, записывая каждый в отдельное поле.

Ответ:

- ✓ 3
- ✓ 4
- ✓ 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.4

Условие:

За круглым столом собрались 14 человек, каждый из них либо лжец, который всегда врёт, либо рыцарь, который всегда говорит правду. Каждый из сидящих за столом сделал заявление:

«Среди четырёх ближайших ко мне в круге людей (2 соседа справа и 2 соседа слева) есть хотя бы один лжец!»

Сколько лжецов могло быть в круге? Укажите все возможные варианты, записывая каждый в отдельное поле.

Ответ:

✓ 3

✓ 4

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Условие:

Имеется восемь одинаковых игральных кубиков, на гранях которых написаны натуральные числа от 1 до 6. Кубики таковы, что на любой паре противоположных граней написаны числа, отличающиеся на 1. Из этих восьми кубиков собрали куб размером $2 \times 2 \times 2$ так, что сумма чисел на любых двух приложенных друг к другу гранях оказалась равна 7. При этом сумма чисел на верхней грани этого большого куба равна 11. Найдите сумму чисел на нижней его грани.

Ответ: 17

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим, что числа на гранях каждого кубика располагаются так: напротив 1 стоит 2 (больше ничего не может быть), напротив 6 — 5, а тогда напротив 3 стоит 4. То есть мы можем сказать, что напротив нечётного числа x стоит число $x + 1$, а напротив чётного y стоит $y - 1$. Посмотрим на какое-нибудь число x , стоящее на верхней грани большого куба. Пусть x написано на грани кубика А, под которым находится кубик В. Если $x = 1, 3$ или 5 , то на нижней грани А находится $x + 1$, на верхней грани В $7 - x - 1 = 6 - x$ (это снова 1, 3 или 5), на нижней грани В $7 - x$. Аналогично, если x чётно, то на нижней грани А стоит $x - 1$, на верхней грани В $7 - x + 1 = 8 - x$ (число чётное), а тогда на нижней грани В находится $8 - x - 1 = 7 - x$. Итак, на верхней грани А и на нижней грани В стоят числа, в сумме дающие 7. Следовательно, сумма всех чисел на верхней и нижней гранях большого куба должна быть равна 28. Так как сумма чисел на верхней грани равна 11, то на нижней будет 17.

Задание № 6.2

Условие:

Имеется восемь одинаковых игральных кубиков, на гранях которых написаны натуральные числа от 1 до 6. Кубики таковы, что на любой паре противоположных граней написаны числа, отличающиеся на 3. Из этих восьми кубиков собрали куб размером $2 \times 2 \times 2$ так, что сумма чисел на любых двух приложенных друг к другу гранях оказалась равна 7. При этом сумма чисел на передней грани этого большого куба равна 13. Найдите сумму чисел на задней его грани.

Ответ: 15

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.3

Условие:

Имеется восемь одинаковых игральных кубиков, на гранях которых написаны натуральные числа от 1 до 6. Кубики таковы, что на любой паре противоположных граней написаны числа, отличающиеся на 1. Из этих восьми кубиков собрали куб размером $2 \times 2 \times 2$ так, что сумма чисел на любых двух прислонённых друг к другу гранях оказалась равна 7. При этом сумма чисел на левой грани этого большого куба равна 16. Найдите сумму чисел на правой его грани.

Ответ: 12

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.4

Условие:

Имеется восемь одинаковых игральных кубиков, на гранях которых написаны натуральные числа от 1 до 6. Кубики таковы, что на любой паре противоположных граней написаны числа, отличающиеся на 3. Из этих восьми кубиков собрали куб размером $2 \times 2 \times 2$ так, что сумма чисел на любых двух приложенных друг к другу гранях оказалась равна 7. При этом сумма чисел на верхней грани этого большого куба равна 10. Найдите сумму чисел на нижней его грани.

Ответ: 18

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

Дан треугольник ABC с углом B , равным 60° . В точках A и C провели две касательные к описанной окружности ABC , пересекающиеся в точке P . Перпендикуляр к BC , восстановленный в точке C , пересекает прямую AB в точке Q . Найдите $\angle CQP$, если $\angle BAC = 40^\circ$.

Ответ: 50

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

По лемме об угле между касательной и хордой углы $PAC = PCA = ABC = 60^\circ$. Поэтому треугольник PCA равносторонний.

По сумме углов треугольника ACQ угол AQC равен $180 - 90 - 60 = 30^\circ$. Поэтому точка Q лежит на окружности с центром P и радиусом $PC = PA$. Это можно понимать по-разному, можно сформулировать теорему, обратную теореме о центральном угле, а можно делать через прямую теорему о центральном угле.

Через прямую теорему: пусть окружность с центром P и радиусом PA пересекает луч BA в точке Q' . Тогда, по теореме о центральном угле, угол $AQ'C$ равен половине угла $APC = \frac{60}{2} = 30$. Но угол AQC тоже равен 30. Поэтому у треугольника $QQ'C$, если он существует, очень тяжёлая жизнь, у него внешний угол равен внутреннему, что невозможно.

Если следить за судьбой треугольника $QQ'C$ слишком грустно, то можно сказать иначе: Из-за равенства углов $BQC = BQ'C = 30^\circ$ получается, что прямые QC и $Q'C$ должны быть параллельны или совпадать. Но параллельными они

быть не могут, потому что имеют общую точку С. Значит, они совпадают и, значит, совпадают точки Q и Q'.

Пусть угол $BAC = \alpha$.

Тогда $BCA = 120 - \alpha$.

Тогда $ACQ = 90 - BCA = \alpha - 30$.

По теореме о центральном угле $APQ = 2 ACQ = 2\alpha - 60$.

По сумме углов треугольника $AQP = QAP = 90 - \frac{APQ}{2} = 120 - \alpha$.

Получаем $CQP = AQP - 30 = 90 - \alpha$.

Подставляя конкретные значения $BAC = \alpha$, получаем соответствующий ответ.

Задание № 7.2

Условие:

Дан треугольник ABC с углом B , равным 60° . В точках A и C провели две касательные к описанной окружности ABC , пересекающиеся в точке P . Перпендикуляр к BC , восстановленный в точке C , пересекает прямую AB в точке Q . Найдите $\angle CQP$, если $\angle BAC = 50^\circ$.

Ответ: 40

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

Дан треугольник ABC с углом B , равным 60° . В точках A и C провели две касательные к описанной окружности ABC , пересекающиеся в точке P . Перпендикуляр к BC , восстановленный в точке C , пересекает прямую AB в точке Q . Найдите $\angle CQP$, если $\angle BAC = 70^\circ$.

Ответ: 20

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.4

Условие:

Дан треугольник ABC с углом B , равным 60° . В точках A и C провели две касательные к описанной окружности ABC , пересекающиеся в точке P . Перпендикуляр к BC , восстановленный в точке C , пересекает прямую AB в точке Q . Найдите $\angle CQP$, если $\angle BAC = 80^\circ$.

Ответ: 10

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

Назовём натуральное число *интересным*, если в его двоичной записи не более 2 единиц. Например, числа $4 = 100_2$ и $40 = 101000_2$ — *интересные*, а число $14 = 1110_2$ *интересным* не является. Сколько существует интересных чисел, меньших 1000?

Ответ: 55

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Число меньше 1000 в двоичной записи не более чем десятизначно. Имеем десять степеней двойки (включая нулевую), и для старшего разряда N ровно $N - 1$ возможностей поставить вторую двойку. Итого, $10 + (9 + 8 + 7 + \dots + 1) = 55$ возможных вариантов.

Задание № 8.2

Условие:

Назовём натуральное число *интересным*, если в его двоичной записи не более 2 единиц. Например, числа $4 = 100_2$ и $40 = 101000_2$ — *интересные*, а число $14 = 1110_2$ *интересным* не является. Сколько существует интересных чисел, меньших 2000?

Ответ: 66

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

Назовём натуральное число *интересным*, если в его двоичной записи не более 2 единиц. Например, числа $4 = 100_2$ и $40 = 101000_2$ — *интересные*, а число $14 = 1110_2$ *интересным* не является. Сколько существует интересных чисел, меньших 4000?

Ответ: 78

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.4

Условие:

Назовём натуральное число *интересным*, если в его двоичной записи не более 2 единиц. Например, числа $4 = 100_2$ и $40 = 101000_2$ — *интересные*, а число $14 = 1110_2$ *интересным* не является. Сколько существует интересных чисел, меньших 8000?

Ответ: 91

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

**Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике
для 11 класса**

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

Известно, что сумма квадратов корней трёхчлена $x^2 + 2ax + 2b$ равна сумме квадратов корней трёхчлена $x^2 + 2bx + 2a$. Чему равно $a + b$, если $a \neq b$?

Ответ: -1

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Обозначим x_{11}, x_{12} — корни трёхчлена $x^2 + 2ax + 2b$, а x_{21}, x_{22} — корни трёхчлена $x^2 + 2bx + 2a$.

По т.Виета $x_{11} + x_{12} = -2a$, а $x_{11}x_{12} = 2b$; $x_{21} + x_{22} = -2b$, а $x_{21}x_{22} = 2a$.

Из условия задачи $x_{11}^2 + x_{12}^2 = x_{21}^2 + x_{22}^2$.

А так как $(x_{11} + x_{12})^2 = x_{11}^2 + x_{12}^2 + 2x_{11}x_{12}$ и $(x_{21} + x_{22})^2 = x_{21}^2 + x_{22}^2 + 2x_{21}x_{22}$, откуда $(x_{11} + x_{12})^2 - 2x_{11}x_{12} = x_{11}^2 + x_{12}^2 = x_{21}^2 + x_{22}^2 = (x_{21} + x_{22})^2 - 2x_{21}x_{22}$, значит $(x_{11} + x_{12})^2 - 2x_{11}x_{12} = (x_{21} + x_{22})^2 - 2x_{21}x_{22}$.

Подставим данные из условия: $(-2a)^2 - 2 \cdot 2b = (-2b)^2 - 2 \cdot 2a$, откуда $4a^2 + 4a - (4b^2 + 4b) = 0$.

Решим это уравнение:

$$a^2 + a - (b^2 + b) = 0$$

$$a^2 - b^2 + a - b = 0$$

$$(a - b)(a + b) + a - b = 0$$

$$(a - b)(a + b + 1) = 0.$$

Из условия известно, что $a \neq b$, тогда $a + b = -1$.

Задание № 1.2

Условие:

Известно, что сумма квадратов корней трёхчлена $x^2 + 3ax + 3b$ равна сумме квадратов корней трёхчлена $x^2 + 3bx + 3a$. Чему равно $a + b$, если $a \neq b$?

Ответ: $-2/3$

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

Известно, что сумма квадратов корней трёхчлена $x^2 + 5ax + 5b$ равна сумме квадратов корней трёхчлена $x^2 + 5bx + 5a$. Чему равно $a + b$, если $a \neq b$?

Ответ: $-2/5$

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.4

Условие:

Известно, что сумма квадратов корней трёхчлена $x^2 + 7ax + 7b$ равна сумме квадратов корней трёхчлена $x^2 + 7bx + 7a$. Чему равно $a + b$, если $a \neq b$?

Ответ: $-2/7$

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

Известно, что $F(F(x)) = 9x - 4$. Какой может быть функция $F(x)$?

Ответ:

- ☐ $F(x) = 3x - 2$
- ☒ $F(x) = 3x - 1$
- ☐ $F(x) = 3x + 1$
- ☐ $F(x) = 3\sqrt{x} - 2$
- ☐ $F(x) = 9x^2 - 4$
- ☐ $F(x) = (9x - 4)^2$

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Первый способ решения. Поскольку тут предлагается конечное число вариантов, можно просто для каждого из них выполнить проверку и увидеть, что подходит, что не подходит.

Второй способ решения. По сути сокращающий перебор. Заметим, что окончательная функция линейная, это значит, что исходная функция тоже линейная. Или иначе на языке преобразований: линейное преобразование — это растяжение (сжатие) и параллельный перенос, и оно является композицией также линейных преобразований.

Поймём теперь, каких. Понятно, что коэффициент может быть либо 3, либо —3. То есть это функция вида $3x + c$ (так как среди предложенных у нас —3 нет). Тогда, применяя дважды, получаем: $3(3x + c) + c = 9x - 4$. Откуда $4c = 4$ и, следовательно, $c = 1$.

Задание № 2.2

Условие:

Известно, что $F(F(x)) = 16x - 9$. Какой может быть функция $F(x)$?

Ответ:

- ☐ $F(x) = 4x - 3$
- ☐ $F(x) = 4x + 3$
- ☐ $F(x) = 4\sqrt{x} - 3$
- ☒ $F(x) = 3 - 4x$
- ☐ $F(x) = 4x^2 - 3$
- ☐ $F(x) = (4x - 3)^2$

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

Известно, что $F(F(x)) = 4x - 3$. Какой может быть функция $F(x)$?

Ответ:

- ☐ $F(x) = 2x + 3$
- ☐ $F(x) = 3x - 1$
- ☒ $F(x) = 3 - 2x$
- ☐ $F(x) = 2\sqrt{x} + 1$
- ☐ $F(x) = 2x^2 - \sqrt{3}$
- ☐ $F(x) = (2x - \sqrt{3})^2$

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.4

Условие:

Известно, что $F(F(x)) = 9x - 2$. Какой может быть функция $F(x)$?

Ответ:

- ☐ $F(x) = 3x - 1$
- ☒ $F(x) = 1 - 3x$
- ☐ $F(x) = 9x^2 - 4$
- ☐ $F(x) = 3x - \sqrt{2}$
- ☐ $F(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{2}$
- ☐ $F(x) = (3x - \sqrt{2})^2$

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

Условие:

Назовём простое число *разложимым*, если его можно представить в виде суммы 5 составных чисел (не обязательно различных). Найдите наибольшее простое число, которое не является разложимым.

Ответ: 23

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Наименьшее нечётное составное число — 9, наименьшее чётное составное число — 4. Поэтому наименьшая сумма пяти составных чисел, хотя бы одно из которых нечётно, $9 + 4 + 4 + 4 + 4 = 25$. Большие простые числа получаются, если заменить одну из 4 на подходящее чётное число. Меньшие нечётные числа не «разложимы», наибольшее простое из них — 23.

Задание № 3.2

Условие:

Назовём простое число *разложимым*, если его можно представить в виде суммы 4 составных чисел (не обязательно различных). Найдите наибольшее простое число, которое не является разложимым.

Ответ: 19

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

Условие:

Назовём простое число *разложимым*, если его можно представить в виде суммы 9 составных чисел (не обязательно различных). Найдите наибольшее простое число, которое не является разложимым.

Ответ: 37

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.4

Условие:

Назовём простое число *разложимым*, если его можно представить в виде суммы 7 составных чисел (не обязательно различных). Найдите наибольшее простое число, которое не является разложимым.

Ответ: 31

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Условие:

Бумажный прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 4$ согнули по прямой так, что вершина D попала в вершину B . Найдите длину линии сгиба.

Ответ: 3.75

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

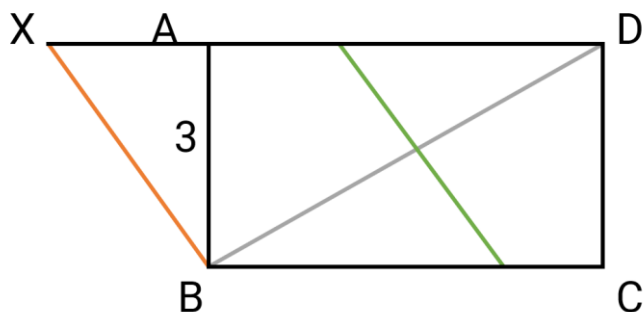
Заметим, что линия сгиба является серединным перпендикуляром к отрезку BD . Построим отрезок BX , параллельный и равный линии сгиба, проходящий через B и продолжение CD (пересечение с продолжением обозначим за X). Тогда BX перпендикулярен BD , откуда $\angle XBD = 90^\circ$. Треугольники XBD и BAD подобны, т.к. $\angle XBD = \angle BAD = 90^\circ$, $\angle XDB = \angle ADB$, т.к. X , A и D лежат на одной прямой (A лежит между X и D).

Тогда из подобия следует, что $\frac{XB}{BD} = \frac{BA}{AD}$, то есть $XB = \frac{BA}{AD} \cdot BD$.

$BA = 3$ из условия, $AD = BC = 4$, т.к. бумажный лист прямоугольный,

$BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ по теореме Пифагора.

Отсюда $XB = \frac{3}{4} \cdot 5 = 3.75$. Т.к. XB равен линии сгиба, то и линия сгиба равна 3.75.



Задание № 4.2

Условие:

Бумажный прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 6$ и $BC = 8$ согнули по прямой так, что вершина D попала в вершину B . Найдите длину линии сгиба.

Ответ: 7.5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

Бумажный прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ и $BC = 12$ согнули по прямой так, что вершина D попала в вершину B . Найдите длину линии сгиба.

Ответ: $65/12$

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.4

Условие:

Бумажный прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 10$ и $BC = 24$ согнули по прямой так, что вершина D попала в вершину B . Найдите длину линии сгиба.

Ответ: 130/12

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

Ровно в полдень муравей выбегает из муравейника и по прямой тропинке бежит к полю. Через минуту вслед за ним выбегает второй муравей и бежит вслед за первым, но со скоростью на 1 см/мин большей, чем скорость первого. И так далее: каждую минуту из муравейника выбегает следующий муравей и бежит вдогонку за остальными со скоростью на 1 см/мин большей, чем скорость предыдущего. Какой по счёту муравей будет возглавлять процессию через 2 часа, если скорость первого муравья равна 70 см/мин? Если муравьев будет несколько, укажите их всех.

Ответ: 26

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пусть скорость первого муравья V . Тогда скорость k -го муравья $V + k - 1$. А бежать он будет $120 - (k - 1)$ минут. Тогда впереди будет тот муравей, кто к 14:00 окажется дальше всего от муравейника. То есть тот, у кого больше всего будет произведение $(120 - (k - 1))(V + (k - 1)) = -(k - 1)^2 - (k - 1)(V - 120) + 120V$.

Это парабола относительно $(k - 1)$, ветви которой направлены вниз. Соответственно максимум достигается в её вершине. А именно в точке $k - 1 = (120 - V) \div 2$.

Для нашего конкретного $V = 70$ $k - 1 = 25$, то есть $k = 26$.

Задание № 5.2

Условие:

Ровно в полдень муравей выбегает из муравейника и по прямой тропинке бежит к полю. Через минуту вслед за ним выбегает второй муравей и бежит вслед за первым, но со скоростью на 1 см/мин большей, чем скорость первого. И так далее: каждую минуту из муравейника выбегает следующий муравей и бежит вдогонку за остальными со скоростью на 1 см/мин большей, чем скорость предыдущего. Какой по счёту муравей будет возглавлять процессию через 2 часа, если скорость первого муравья равна 60 см/мин? Если муравьев будет несколько, укажите их всех.

Ответ: 31

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

Ровно в полдень муравей выбегает из муравейника и по прямой тропинке бежит к полю. Через минуту вслед за ним выбегает второй муравей и бежит вслед за первым, но со скоростью на 1 см/мин большей, чем скорость первого. И так далее: каждую минуту из муравейника выбегает следующий муравей и бежит вдогонку за остальными со скоростью на 1 см/мин большей, чем скорость предыдущего. Какой по счёту муравей будет возглавлять процессию через 2 часа, если скорость первого муравья равна 80 см/мин? Если муравьев будет несколько, укажите их всех.

Ответ: 21

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.4

Условие:

Ровно в полдень муравей выбегает из муравейника и по прямой тропинке бежит к полю. Через минуту вслед за ним выбегает второй муравей и бежит вслед за первым, но со скоростью на 1 см/мин большей, чем скорость первого. И так далее: каждую минуту из муравейника выбегает следующий муравей и бежит вдогонку за остальными со скоростью на 1 см/мин большей, чем скорость предыдущего. Какой по счёту муравей будет возглавлять процессию через 2.5 часа, если скорость первого муравья равна 60 см/мин? Если муравьев будет несколько, укажите их всех.

Ответ: 46

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 4

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Условие:

На плоскости проведено 10 прямых. Известно, что если выбрать из этих прямых любые 4, то среди выбранных прямых найдутся хотя бы две параллельные. Какое наибольшее количество точек пересечения могут иметь между собой все проведённые прямые?

Ответ: 33

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Рассмотрим расположение с максимальным количеством точек пересечения.

В нём никакие три прямые не пересекаются в одной точке, т.к. иначе можно сдвинуть одну из прямых, которая участвует в вышеуказанном тройном пересечении, и количество точек пересечения увеличится.

Разобьём прямые на группы таким образом, что прямые находятся в одной группе тогда и только тогда, когда они параллельны. Заметим, что групп не более, чем 3, т.к. иначе можно выбрать по одной прямой из 4 различных групп, и получится четвёрка прямых, среди которых нет пары параллельных.

Пусть $X \geq Y \geq Z$ — количество прямых в группах. Считаем понятным, что точек пересечения тогда равно сумме попарных произведений, а именно

$$X \cdot Y + X \cdot Z + Y \cdot Z.$$

Пусть в расположении прямых с максимальным количеством точек пересечения X больше Z хотя бы на 2. Тогда сотрём одну прямую из группы X и проведём прямую параллельную прямой из группы Z . Тогда количество точек пересечения изменится на $(X - 1) + Y - Y - Z = X - Z - 1$, что больше 0. Значит в максимальном расположении $X = Z$ или $Z + 1$,

откуда $X = 4, Y = 4, Z = 3$ или $X = 4, Y = 3, Z = 3$.

Первый вариант нам не подходит (прямых 11), а второй является решением задачи. Таким образом ответ $12 + 12 + 9 = 33$.

Задание № 6.2

Условие:

На плоскости проведено 11 прямых. Известно, что если выбрать из этих прямых любые 4, то среди выбранных прямых найдутся хотя бы две параллельные. Какое наибольшее количество точек пересечения могут иметь между собой все проведённые прямые?

Ответ: 40

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.3

Условие:

На плоскости проведено 13 прямых. Известно, что если выбрать из этих прямых любые 4, то среди выбранных прямых найдутся хотя бы две параллельные. Какое наибольшее количество точек пересечения могут иметь между собой все проведённые прямые?

Ответ: 56

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.4

Условие:

На плоскости проведено 14 прямых. Известно, что если выбрать из этих прямых любые 4, то среди выбранных прямых найдутся хотя бы две параллельные. Какое наибольшее количество точек пересечения могут иметь между собой все проведённые прямые?

Ответ: 65

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

Коля придумал функцию

$$f(x) = (x - 100)(2x - 200)(3x - 300) - (ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

При некоторых фиксированных значениях параметров (a, b, c, d) функция $f(x)$ такова, что:

$$\begin{cases} f(1) = \pi \\ f(2) = \pi \\ f(3) = \pi \\ f(4) = \pi \end{cases}$$

Найдите значение параметра a .

Ответ: 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Многочлен третьей степени может иметь одинаковое значение в четырёх точках, только если он тождественен. Поэтому коэффициент при x^3 равен 0, то есть $a = 6$.

Задание № 7.2

Условие:

Коля придумал функцию

$$f(x) = (x - 100)(2x - 200)(4x - 400) - (ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

При некоторых фиксированных значениях параметров (a, b, c, d) функция f(x) такова, что:

$$\begin{cases} f(1) = \pi/2 \\ f(2) = \pi/2 \\ f(4) = \pi/2 \\ f(8) = \pi/2 \end{cases}$$

Найдите значение параметра a.

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

Коля придумал функцию

$$f(x) = (x - 100)(3x - 300)(5x - 500) - (ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

При некоторых фиксированных значениях параметров (a, b, c, d) функция f(x) такова, что:

$$\begin{cases} f(1) = 2\pi \\ f(3) = 2\pi \\ f(5) = 2\pi \\ f(7) = 2\pi \end{cases}$$

Найдите значение параметра a.

Ответ: 15

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.4

Условие:

Коля придумал функцию

$$f(x) = (2x - 200)(3x - 300)(4x - 400) - (ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

При некоторых фиксированных значениях параметров (a, b, c, d) функция $f(x)$ такова, что:

$$\begin{cases} f(2) = 3\pi \\ f(3) = 3\pi \\ f(4) = 3\pi \\ f(5) = 3\pi \end{cases}$$

Найдите значение параметра a .

Ответ: 24

Точное совпадение ответа — 1 балл

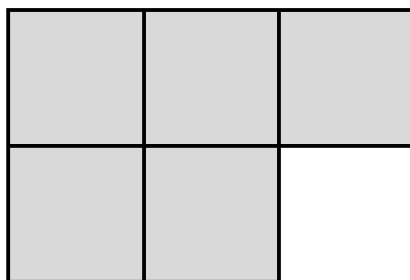
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

Известно, что количество способов вырезать по линиям сетки из клетчатого квадрата $N \times N$ квадрат 2×2 в 7 раз меньше, чем количество способов вырезать из этого же квадрата фигуру Р-пентамино (см. рисунок).



Найдите сторону N такого квадрата. Фигуру можно поворачивать и переворачивать.

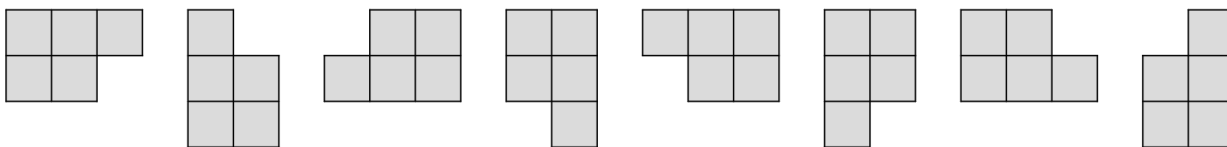
Ответ: 9

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Посчитаем количество способов вырезать из квадрата $N \times N$ квадрат 2×2 . Это будет $(N - 1) \times (N - 1)$ т.к. левой верхней клеткой квадрата 2×2 может быть любая из



$(N - 1) \times (N - 1)$ клеток (все, кроме нижней строчки и правого столбца).

Посчитаем аналогично количество способов вырезать из квадрата $N \times N$ пентамино, учитывая то, что повернуть эту фигуру можно 8 способами.

Получаем $8 \cdot (N - 1) \cdot (N - 2)$.

Отсюда получается уравнение

$$8 \cdot (N - 1) \cdot (N - 2) = 7 \cdot (N - 1) \cdot (N - 1)$$

$$8 \cdot (N - 2) = 7 \cdot (N - 1)$$

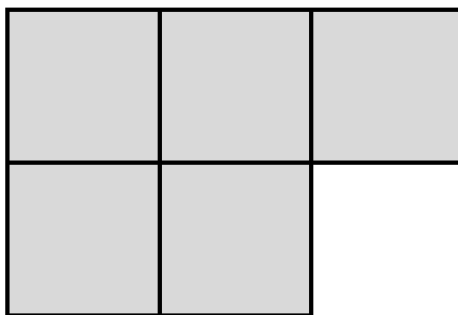
$$8N - 16 = 7N - 7$$

$$N = 16 - 7 = 9.$$

Задание № 8.2

Условие:

Известно, что количество способов вырезать по линиям сетки из клетчатого квадрата $N \times N$ полосу 1×3 в 3 раза меньше, чем количество способов вырезать из этого же квадрата фигуру Р-пентамино (см. рисунок).



Найдите сторону N такого квадрата. Фигуру можно поворачивать и переворачивать.

Ответ: 4

Точное совпадение ответа — 1 балл

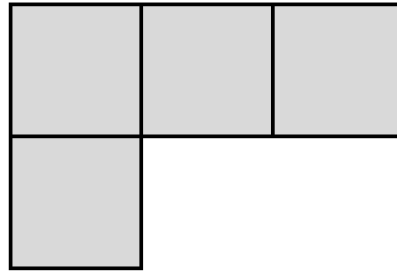
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

Известно, что количество способов вырезать по линиям сетки из клетчатого квадрата $N \times N$ квадрат 2×2 в 6 раз меньше, чем количество способов вырезать из этого же квадрата фигуру Г-тетрамино (см. рисунок).



Найдите сторону N такого квадрата. Фигуру можно поворачивать и переворачивать.

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

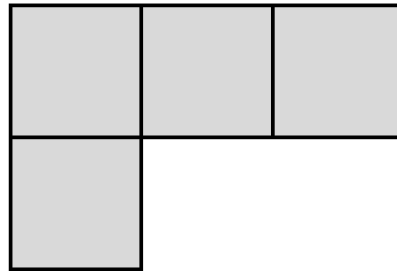
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.4

Условие:

Известно, что количество способов вырезать по линиям сетки из клетчатого квадрата $N \times N$ полосу 1×3 в $3\frac{1}{2}$ раза меньше, чем количество способов вырезать из этого же квадрата фигуру Г-тетрамино (см. рисунок).



Найдите сторону N такого квадрата. Фигуру можно поворачивать и переворачивать.

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1